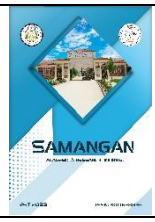
Samangan Scientific and Research Journal
https://researchsparker.edu.af/index.php/SARJ
DOI: 10.64226/sarj.v2i01.48
ISSN: 3006-8835



Review of Educational Theories and Their Application in Mathematics Learning

Abdul Basir Deljoy[1,*]
[1]Department of Mathematics, Education Faculty, Samangan Institute of Higher Education
[*] *Corresponding Author: basir.deljuy@gmail.com*

Cite this study: Deljoy, A. B. (2024). Review of Educational Theories and Their Application in Mathematics Learning, Samangan Academic and Research Journal, 2(1), 106-120.

Keywords
Education, Mathematics, Educational Theories, Learning-Teaching

Research

Received:
Revised:
Accepted:
Published:

Abstract

The purpose of this study is to investigate the effectiveness of educational theories and its use as one of the methods of applying learning in mathematics education that is effective on the promotion of conceptual knowledge of this section. To investigate the different dimensions of the subject, creating the main structure, providing the content and information needed in this research, a bookkeeping method has been used. Different theoretical frameworks have been developed for the research and development of mathematical education such as Davidazobel learning theory, Jean Piaget cognitive theory, Vygotsky's theory, and birr's theory. In some of these models, mathematical learning is dealt with as a real flow, and in others mathematical learning is treated abstractly. The results of this research are of special importance to help improve the learning-teaching flow using educational theories and cause mastery learning and consequently lead to professional learning.

مجلۀ علمی-تحقیقی سمنگان
https://researchsparker.edu.af/index.php/SARJ
DOI: 10.64226/sarj.v2i01.48
ISSN: 3006-8835

ریاضیات در یادگیری آن از استفاده و بررسی نظریه‌های آموزشی

پوهندوی عبدالبصیر دلجوی[1،*]
[1]دیپارتمنت ریاضی، پوهنحی تعلیم و تربیه، مؤسسۀ تحصیلات عالی سمنگان
* نویسنده مسؤول: basir.deljuy@gmail.com

مرجع‌دهی: دلجوی ع. (1403). ریاضیات در یادگیری آن از استفاده و بررسی نظریه‌های آموزشی، ۲(۱)، 106-120

کلمات کلیدی
آموزش، ریاضیات، نظریه-های آموزشی و یادگیری-یاددهی

چکیده

هدف از این تحقیق بررسی اثربخشی نظریه‌های آموزشی و استفاده از آن به منزلۀ یکی از شیوه‌های به‌کارگیری یادگیری در امر آموزش ریاضیات است که بر ارتقای دانش مفهومی این بخش تأثیرگذار است. برای بررسی ابعاد مختلف موضوع، ایجاد ساختار اصلی، تهیۀ محتوا و اطلاعات مورد نیاز در این تحقیق از روش کتاب‌خانه‌یی کار گرفته شده است. چارچوب‌های نظری متفاوتی برای تحقیق و انکشاف آموزش ریاضی تدوین شده که از جملۀ این نظریه‌ها نظریۀ یادگیری دیویدآزوبل، نظریۀ شناختی ژان پیاژه، نظریۀ ویگوتسکی، نظریۀ برونر و نظریۀ تفکر هندسی وِن‌هیل است. این نظریه‌ها در زمرۀ مودل‌های واقعی به‌شمار می‌رود. برای انکشاف هر نوع نظریۀ بنیادی در زمینۀ تدریس ریاضی، آموزشگران به بررسی جنبه‌هایی از ریاضی که محصلان در آن با مُشکل بیش‌تری مواجه‌اند، پرداخته و سعی در ارائۀ نظریه‌های یادگیری در زمینه‌های مختلف ریاضی کرده‌اند. از آن‌جا که ریاضی به‌عنوان مهم‌ترین بخش بسیاری از فعالیت‌های روزمره می‌باشد، مودل‌های مرتبط با یادگیری آن اهمیت ویژه‌یی پیدا کرده است. در بعضی از این مودل‌ها به یادگیری ریاضی به‌صورت یک جریان واقعی پرداخته شده است و در تعدادی دیگر به یادگیری ریاضی به‌طور تجریدی نگریسته شده است. نتایج این تحقیق برای کمک به بهبود جریان یادگیری- یاددهی با استفاده از نظریه‌های آموزشی اهمیت ویژه‌یی دارد و باعث ایجاد یادگیری در حد تسلط و در نتیجه منجر به یادگیری حرفه‌یی می‌شود.

مقدمه

در طول تاریخ انسان‌ها همواره در حال یادگیری- یاددهی بوده‌اند و تجربیات خویش را به نسل‌های آینده منتقل می‌کردند، تا این‌که در سال (1956م) بلوم اهداف آموزشی را طبقه‌بندی کرد. تأثیرات این طبقه‌بندی باعث شد تغییرات بزرگی در چگونه‌گی یاددهی- یادگیری و شیوهٔ تدریس صورت گیرد. از جمله اهداف اساسی در آموزش بلوم، آن است که محصل بتواند مفاهیم فراگرفته‌شده را در زمان لازم و در عمل به‌خاطر آورده و به‌طور صحیح به کار ببندد؛ بنابراین، لازم است در مورد بهبود یادگیری ریاضی که یکی از موضوعات اساسی و چالش‌برانگیز در تدریس ریاضی است، توجه جدی صورت گیرد (عماری، 1397: ص138).

کاربرد نظریه‌های آموزشی در عرصهٔ یادگیری ریاضی می‌تواند یکی از موارد استفادهٔ مناسب و مفید از این پدیده باشد. پیش‌شرط استفاده از این نظریه‌ها در یادگیری ریاضی وجود زمینه و بسترهای لازم و دیدگاه روشن دربارهٔ آن در برنامه‌های آموزشی است. چانگ (2001م) در تحقیق خود به این نتیجه رسید که استفاده از نظریه‌های آموزشی باعث تسهیل تدریس مفاهیم ریاضی به یادگیرنده‌گان، تقویت تجسم، صرفه‌جویی در وقت، ارتقای درک و فهم و تغییر باورهای یادگیرنده‌گان نسبت به ریاضی می‌شود. صفوی (1389) می‌گوید نظریه‌های آموزشی می‌تواند به عنوان «ابزارهای ذهنی» برای توسعه و سازمان-دهی مجدد ساختارهای شناختی یادگیرنده در طول یادگیری مطالب ریاضی مورد توجه قرار گیرد و یادگیرنده‌گان می‌توانند روش‌های گرافی را برای سازمان‌دهی تفکر خود شان به همان صورتی‌که دانش مفاهیم را می‌سازند، مورد استفاده قرار دهند. بناءً توجه به جریان‌های ذهنی یادگیرنده برای تولید محتوای آموزشی مؤثر و ضروری است (شهریار، 1396: ص116).

فهم این‌که یادگیرنده‌ها چگونه ریاضی را یاد می‌گیرند، می‌تواند به معلمان ریاضی در انتخاب شیوه‌های تدریس کمک کند. در واقع این فهم درست و واقع‌گرایانه معلمان را قادر می‌سازد تا با داشتن تصویری شفاف از چگونه‌گی بروز رفتار ریاضی افراد، تصمیم مناسب علمی در انتخاب عنوان‌های درسی، تقدم و تأخر مطالب و اتخاذ شیوه‌های آموزشی را داشته باشند و در رفع موانع یادگیری یادگیرنده‌ها بکوشند (علم‌الهدایی، 1387).

درک عمیق و توانایی به‌کارگیری و به‌کاربستن جریان‌ها، مفاهیم و روش‌ها لازمهٔ یادگیری ریاضیات است. بناءً ارزش یادگیری ریاضیات به‌عنوان علم بنیادی بر کسی پوشیده نیست. هم‌چنین دشواری و مشکلاتی- که یادگیری و یاددهی این شاخه از علم به همراه داشته، به خوبی شناخته شده است (مصلحیان، 1384).

امروزه نظریه‌های آموزشی به‌عنوان یک ضرورت در امر آموزش مطرح است. در تدریس ریاضیات از مبانی نظری روان‌شناسی یادگیری و روان‌شناسی تربیتی نیز استفاده می‌کنند. نتیجهٔ این تعامل ایجاد یک برنامهٔ آموزشی آزمون‌پذیر است که می‌توان در آن نظریه‌های آموزشی مختلف را به‌کار بست و کارایی و اثربخشی هریک را آزمود. نظریه‌های آموزشی ابزاری برای تدریس و آموزش است و باعث کارآمدترشدن مواد آموزشی می‌شود (سیف، 1389: ص20).

تحقیقات زیادی توسط محققان و آموزش‌گران ریاضی در زمینهٔ نقش نظریه‌های آموزشی در تدریس و یادگیری ریاضی انجام شده؛ از جمله نظریه‌هایی‌که در این مورد ارائه شده توسط (1959, Pierre Van Hiele) بود که به بررسی نوع تفکر هندسی پرداخت؛ اما نظریهٔ وِن هیل با معرفی در مجامع عمومی مورد توجه آموزش‌گران ریاضی قرار گرفت و تحقیقات گسترده‌یی در این زمینه انجام شد. مودل تفکر ریاضی وِن هیل در بین محقِقان آموزش ریاضی بسیار مورد توجه بوده است و در حال حاضر به‌عنوان یکی از کاربردی‌ترین مودل‌ها در بررسی سطوح تفکر هندسی برای اشکال دوبعدی مورد استفاده می‌باشد (کلیمنتس و باتیستا، 1992؛ به نقل از پاوسی، 2003). از جمله تحقیقات دیگری انجام‌شده مربوط به ساخت ابزاری برای ارزیابی تفکر هندسی‌ست که به‌صورت پاسخ بسته، پاسخ باز و مصاحبه بوده است. این تحقیقات برای بررسی این نکته که آیا آموزش با توجه به مودل وِن هیل باعث بهبود استدلال هندسی در متعلمان می‌شود؟ و پرداختن به این موضوع که آیا آگاه‌ساختن معلمان از این نظریه در بهبود تدریس آن‌ها مؤثر است؟ اما در دیگر تحقیقات غالباً مودل وِن هیل به‌عنوان یک چارچوب نظری که مشتمل بر موضوعات متفاوتی در ریاضی می‌باشد، مورد استفاده قرار گرفته است (ریحانی، 1384: ص16).

کلیمنتس و باتیستا (1992) با توجه به نتایجی‌که سطوح وِن هیل را به سطوح ژان پیاژه که وی معتقد بود «روند یادگیری هندسه از هندسهٔ توپولوژیکی شروع و به هندسهٔ تصویری و سپس به هندسهٔ اقلیدسی انکشاف می‌یابد»، برای انکشاف مرتبط می‌کند، نشان دادند که سطوح وِن هیل را نباید فقط به‌عنوان یک نظریهٔ آموزشی محض مورد توجه قرار داد؛ بلکه به‌عنوان یک نظریهٔ شناختی قابل توجه است (پاوسی، 2003).

ویرزوپ (1974) نظریهٔ برونر را در جماهیر شوروی مطرح کرد و نشان داد که این نظریه تأثیر معنی‌داری روی آموزش ریاضی دارد. وی سرانجام توانست توجه مربیان را در امریکا به این نظریه جلب کند. یوسسکین (1982) و فویز و همکاران (1986) تحقیقات وی را در این زمینه انکشاف دادند (هرگنهان، 2000). یوسسکین نشان داد که تخصیص آموزش بعضی از متعلمان با نظریهٔ برونر کاری دشواری است؛

زیرا آن‌ها در انتقال از یک سطح به سطح بعدی‌اند. با این حال هان (2007) بیان می‌کند 88 درصد متعلمان را می‌توان به تیوری برونر تخصیص داد.

گوتی‌ارز و جیم (1988) سطح استدلال معلمان قبل از خدمت را در مورد سه موضوع هندسی شامل هندسهٔ مسطح، هندسهٔ فضایی و اندازه‌گیری مورد امتحان قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که سطوح تفکر در دست‌یابی به این موضوعات مستقل از نظریه‌های آموزشی نیستند (مرادی، 1388). از دیگر محققان و مراکز تحقیقاتی که در این زمینه تحقیقات انجام داده‌اند می‌توان به هوفر (1983)، چوی-کو (1990)، گانی و منگینی (2006)، مرادی (1386) و انجمن ملی معلمان ریاضی امریکا (1993) اشاره کرد (حلیمی، 1398: ص8).

در این تحقیق سعی به‌عمل آمده است تا تأثیرات روش‌های تدریس مبتنی بر نظریه‌های آموزشی در ایجاد انگیزه بر پیش‌رفت و یادگیری ریاضی بررسی گردد. بر این اساس، باید تمام روابط و قواعد آموزشی به نحوی ارائه گردد که باعث ایجاد انگیزه در یادگیرنده شود تا بر اساس آن به یادگیری بهتر و بیش‌تر نسبت به قبل دست یافت. هم‌چنین عمل‌کرد استادان مبتی بر نظریه‌های آموزشی بر پیش‌رفت و یادگیری ریاضی محصلان به بررسی گرفته شده و راه‌کارهای عملی برای بهره‌جویی از ریاضیات درآموزش و یادگیری آن معرفی و توضیح گردیده است.

نتایج تحقیق در جهت استفاده از نظریه‌های آموزشی برای آموزش بهتر مفاهیم ریاضی مفکورهٔ مناسبی است؛ چرا که ریاضیات اساس علوم است و نقش اساسی ریاضیات در علوم و تکنالوژی چندبعدی و گوناگون است که این خود اهمیت این تحقیق را در قسمت بهترساختن برنامه‌ها، یادگیری و تدریس ریاضیات نشان می‌دهد.

روش تحقیق

برای بررسی ابعاد مختلف موضوع، ایجاد ساختار اصلی، تهیهٔ محتوا و اطلاعات مورد نیاز در این تحقیق، از روش کتاب‌خانه‌یی که شامل کتب، مقالات مروری و تحقیقی، جستجوی اینترنتی و سایت‌های آموزشی- تحقیقی مانند (https://www.noormags.ir ، https://www.sid.ir ، Web of Science و Google Schola) و هم‌چنان فعالیت‌های عملی در روند تدریس کار گرفته شده است. این تحقیق برای مدرسان رشتهٔ ریاضی و رشته‌های مرتبط باارزش بوده و گامی در جهت آموزش بهتر، ساده‌تر و عمیق‌تر ریاضیات به‌شمار می‌آید.

نقش آموزش بر یادگیری ریاضیات

به گفتهٔ سیف (1387، ص33) آموزش به فعالیت‌هایی گفته می‌شود که با هدف آسان‌ساختن یادگیری از سوی آموزگار یا معلم طراحی می‌شود و بین آموزگار و یک یا چند یادگیرنده به‌صورت کُنش متقابل جریان می‌یابد. اگرچه یادگیری می‌تواند بدون آموزش هم صورت بگیرد. اثرات آموزش بر یادگیری غالباً سودمند و مشاهدهٔ آن معمولاً آسان است. آموزش مجموعه‌یی از روی‌دادهاست که بر یادگیرنده‌گان به طریقی اثر می‌کند که یادگیری آسان شود. پس، اگر چنین آموزش اثربخش باشد، باید آن را برنامه‌ریزی کرد. یادگیری بدون برنامه و هدایت به احتمال زیاد افراد زیادی را پرورش خواهد داد که از زنده‌گی در جامعهٔ فعلی یا آینده ناراضی خواهند بود.

به بیان رضوی (1394) آن‌چه آموزش را پیش می‌برد، لزوماً تکنالوژی و امکانات مورد استفاده نیست؛ بلکه طراحی صحیح، منظم و اجرای مناسب آن‌هاست. در برخی از نظام‌های آموزشی با وجود سیستم‌های پیش‌رفته و رسانه‌های جدید پیش‌رفت چندانی در مورد میزان دست‌آوردهای یادگیرنده‌گان مشاهده نمی‌شود؛ ناکامی موجود بیان‌گر این واقعیت است که داشتن روی‌کرد ابزاری صرف در تکنالوژی آموزشی اشتباهی جبران‌ناپذیر است.

به نقل از سیف (1387، ص514) علاوه بر روش‌های آموزش مستقیم که در آن‌ها فعالیت اصلی آموزش به عهدهٔ معلم است، چند روش آموزش مستقیم دیگر نیز وجود دارد که بدون دخالت مستقیم معلم اجرا می‌شود؛ اما از لحاظ مبانی نظری و پایه‌های تجربی از اندیشه‌های زیربنای آموزش مستقیم پیروی می‌کند، که عبارتند از:

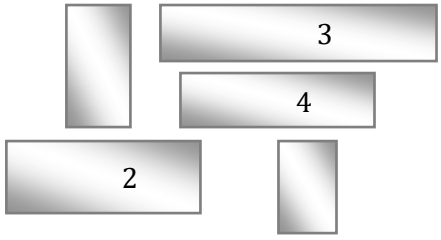
۱. ارائهٔ مطالب در گام‌ها یا مراحل کوچک در برنامهٔ آموزشی، موضوع یادگیری یا مطالب آموزشی به بخش‌های کوچکی تقسیم می‌شود و یادگیرنده هر بار مقدار اندکی از آن‌چه را که قرار است یاد بگیرد، دریافت می‌کند و به تدریج از یک مرحله به مرحلهٔ بعدی پیش می‌رود. در اصطلاح آموزش برنامه‌یی، به این مراحل یا گام‌ها قاب آموزشی می‌گویند.

۲. پاسخ‌دهی فعال، در آموزش برنامه‌یی از یادگیرنده خواسته می‌شود تا در تمامی مراحل یادگیری به‌طور فعال درگیر شود؛ مثلاً سؤالی را جواب دهد، شکلی هندسی رسم کند، یا مسألهٔ ریاضی را حل نماید.

۳. سرعت شخصی یادگیرنده در جریان یادگیری، همان‌طور که بیان شد، آموزش برنامه‌یی یک روش آموزش فردی است. از این‌رو، یادگیرنده‌گان مختلف مجبور نیستند پابه‌پای هم حرکت کنند؛ بلکه هرکس مطابق با توانایی و با سرعت مناسب خودش پیش می‌رود.

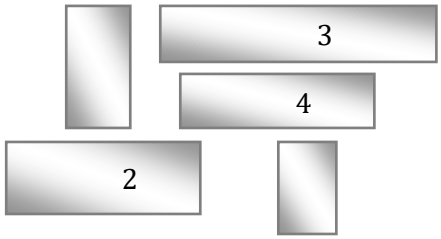
نظریهٔ یادگیری معنادار کلامی

یکی از نظریه‌های شناختی که با یادگیری ارتباط نزدیک دارد، نظریهٔ یادگیری معنادار کلامی است. این، نظریهٔ دیویدآزوبل (1978م) روان‌شناس آمریکایی است (سیف، 1387: ص157). آزوبل یکی از روان‌شناسان مکتب گشتالت است. از نظر وی هریک از رشته‌های علمی دارای یک ساخت و هِرم مفهومی‌ست؛ به‌طوری‌که مفاهیم عمومی در رأس هِرم قرار گرفته و هرچه به قاعدهٔ هِرم نزدیک‌تر می‌شویم، مفاهیم خاص‌تر می‌شود. به این ترتیب، در ذهن یادگیرنده سازمانی از شناخت شکل می‌گیرد که آزوبل آن را ساخت شناختی می‌نامد مطابق شکل (1). وی با توجه به این ساخت شناختی مودل یادگیری معنادار را بیان کرد. در حقیقت زمانی مطلب جدید تدریس‌شده یاد گرفته می‌شود که در ساخت شناختی جای منطقی خود را پیدا کند و مانند یک حلقهٔ جدید به حلقه‌های مفاهیم قبلی ارتباط یابد (حاتمی و همکاران، 1388).



شکل1. طرح نمایشی ساخت شناختی (حاتمی و همکاران، 1388)

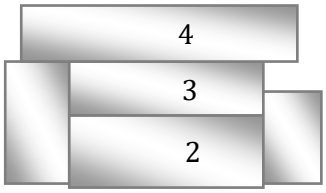
معنی در نظریهٔ آزوبل جای مهمی دارد. معنی به وجود نوعی تناظر یا معادل ذهنی برای یادگیری‌ها در ساخت شناختی یادگیرنده وابسته است؛ یعنی وقتی‌که مفهومی قابل ارتباط‌دادن با مفاهیمی باشد که از پیش در ساخت شناختی فرد وجود دارد، آن مفهوم معنی‌دار است. مطالب غیر معنی‌دار یا مطالبی‌که به‌صورت طوطی‌وار آموخته می‌شود، به‌طور پراکنده و بدون ارتباط با یک‌دیگر در ذهن انباشته می‌گردد (سیف، 1387) (شکل 2)؛ در حالی‌که مطالب معنی‌دار به مطالب یادگرفته‌شدهٔ قبلی مربوط می‌شود.



شکل 2. مودل یادگیری طوطی‌وار (حاتمی و همکاران، 1388)

حاتمی و همکاران (1388) بیان می‌کنند که یکی از مراحل یادگیری معنی‌دار ارائهٔ پیش‌سازمان‌دهنده‌ها است که شامل روشن‌کردن اهداف درس، معرفی پیش‌سازمان‌دهنده و ارتباط‌دادن پیش‌سازمان‌دهنده به

اطلاعات قبلی یادگیرنده‌گان می‌باشد. سیف(1387) پیش‌سازمان‌دهنده را چنین تعریف می‌کند: مجموعه‌یی از مفاهیم مربوط به مطالب یادگیری است که پیش از آموزش، جزئیات تفصیلی آن مطالب در اختیار یادگیرنده‌گان گذاشته می‌شود. پیش‌سازمان‌دهنده یک مفهوم کلیدی است که پایهٔ یادگیری مطالب بعدی را تشکیل می‌دهد.



شکل 3. مودل یادگیری معنی‌دار (حاتمی و همکاران، 1388)

آزوبل برای آن‌که تأثیر پیش‌سازمان‌دهنده‌ها را بر یادگیری روشن سازد، تعدادی از محصلان سال‌های آخر فاکولته را به دو دسته تقسیم کرد. به یک گروه اطلاعات مختصری در مورد مطالب کاملاً انتزاعی در بارهٔ فلزها و آلیاژها و خواص آن‌ها داد؛ اما به گروه دیگر این مطالب مقدماتی ارائه نشد. سپس از هر دو گروه خواسته شد مطالب طولانی‌تری دربارهٔ فولاد مطالعه کنند. سه روز بعد امتحان چهارجوابه با توجه به مطالب داده‌شده برای هردو گروه برگزار کرد. گروهی‌که مطالب انتزاعی و اطلاعات قبلی داشتند، موفق‌تر عمل کردند (کدیور، 1386). بر همین اساس آزوبل پیشنهاد کرد که بهتر است معلمان مطالب مقدماتی نسبتاً کلی و انتزاعی را قبل از اطلاعات جزئی ارائه نمایند.

نقشهٔ شناختی و نظریهٔ ژان پیاژه

یکی از نظریه‌های آموزشی که می‌توان گفت درک مفهومی و استفاده از آن برای افزایش این نوع دانش را مورد تأکید قرار می‌دهد، نظریهٔ ژان پیاژه (1966) است. نظریهٔ پیاژه دارای چهار مفهوم به صورت: جذب، انطباق، تعادل‌یابی و ساخت می‌باشد.

جذب یعنی جریان تغییردادن ادراکات جدید برای هم‌خوان‌کردن آن‌ها با ساخت شناختی فعلی، انطباق یعنی جریان تغییردادن ساخت شناختی برای هم‌خوان‌کردن آن با ادراکات جدید. منظور پیاژه از تعادل-یابی جبران عدم تعادل است. در برخورد با محیط، ساخت شناختی تغییراتی ایجاد می‌کند تا بتواند با موقعیت تازه، درست برخورد نماید و تعادل خود را مجدداً بازیابد. بناءً ساخت عبارت از ساختمان ذهنی یا اندیشه‌های شخص است. واکنش‌های ارثی کودک پس از گذشتِ زمان از طریق تجارب کسب‌شده تغییر می‌یابد و به میکانیزم‌های تازه‌یی تبدیل می‌شود که ساخت‌های شناختی نام دارد (ریحانی، 1384: ص15).

با توجه به نظریهٔ پیاژه می‌توان برداشت نمود تعاملی‌که محصلان در کار با کمپیوتر دارند و مرتب از آن نمایش تصویری دریافت می‌کنند، باعث می‌شود تا مفاهیم مورد نظر پیاژه بهتر از حالتی که کمپیوتر استفاده نمی‌شود، تحقق یابد؛ یعنی جریان تغییردادن ساخت شناختی و نیز جریان تغییردادن ادراکات جدید سریع‌تر صورت گرفته و جریان جذب و انطباق برای ادراک مفاهیم به خوبی صورت می‌گیرد؛ مثلاً در مبحث انتیگرال محصلان ممکن است محاسبه و شکل مختلف از یک انتیگرال یک‌سان را به‌عنوان انتیگرال‌های متفاوتی در نظر بگیرند؛ ولی با بررسی بیش‌تر و تعامل و نمایشی‌که از طریق کمپیوتر حاصل می‌شود، می‌توانند تفاوت ویژه‌گی‌های انتیگرال‌های مختلف را در ذهن خود بهتر درک کرده و طبق تعاریف پیاژه دانش و درک موجود در ذهن خود را به‌طور صحیحی انطباق دهند (احمدی، 1389).

نظریهٔ ویگوتسکی

Barlex & Trebell 2008 با بیان این‌که تحقیقات اخیر دربارهٔ یادگیری، انگیزش و آموزش به‌طور روزافزونی روشن ساخته است که آموزش مؤثر بیش‌تر از ارائهٔ اطلاعات به متعلمان و محصلان است و برخلافِ نظریه‌های یادگیری در گذشته که یادگیرنده را به‌صورت ماشین یادگیری می‌نگریستند، یادگیری هم‌اکنون به‌صورت جریانی فعال از ساختار ذهنی و ساخت مفهوم است. آن‌ها نظریهٔ ویگوتسکی را به‌عنوان الگویی مناسب در آموزش بدین‌گونه معرفی می‌کنند: ویگوتسکی (1987) به این نتیجه رسید آنچه که در ذهن رخ می‌دهد به‌طور اجتماعی و فرهنگی تعیین می‌شود. توانایی‌های شناختی از طریق تعامل‌های حمایت‌شدهٔ اجتماعی رشد می‌یابد. بنابراین، روش‌های تدریس که به‌طور برجسته روش‌های آموزشی نمایشی و توضیحی را به‌کار می‌گیرد، به‌طور فزاینده‌یی ملاحظه می‌شود که بی‌اثر است. تصدیق فزاینده‌یی وجود دارد که به‌منظور یادگیری مؤثر، محصلان باید فعالانه در جریان یادگیری درگیر شوند (شهریار، 1396: ص116).

مفکورهٔ ویگوتسکی از این جهت نیز که درک مفهومی را مورد تأکید قرار داده است، در آموزش ریاضیات با اهمیت می‌باشد. Ludvigsen & Krang 2008 مفکورهٔ ویگوتسکی دربارهٔ مفاهیم علمی را به این صورت بیان می‌کنند: یک مفهوم، علمی نیست قبل از آن‌که با دیگر مفاهیم ارتباط داده شده باشد و یا به‌صورت بخشی از سیستم مفهومی بزرگ‌تر شود. محصلانِی‌که به‌صورت سطحی هدایت می‌شوند، ممکن است با مفاهیم مختلفی مواجه شوند؛ اما آن‌ها توجه نکنند که این‌ها چگونه به سیستم مفهومی مرتبط شده‌اند. با این‌حال، در بسیاری مواقع آن‌ها می‌توانند مسأله را حل کنند، با وجود این‌که آن‌ها درک مفهومی محدودی از جریان دارند. این به‌معنای آن است که فقط محصلانی‌که در طول زمان می‌توانند

موقعیت مفهومی و سطحی را ترکیب نمایند و مفاهیم مختلف را به روابط نظام‌دار ارتباط دهند، گفتمان علمی را در گسترهٔ دانش جای می‌دهند. یکی از عقاید ویگوتسکی مفهوم ناحیهٔ تقریبی رشد است. باتلر و لامپ 2008 بیان می‌کنند که ناحیهٔ تقریبی رشد (TheZone of Proximate Development (ZPD))، اصطلاح ویگوتسکی برای طیفی از تکالیف است که به تنهایی چیره‌شدن بر آن‌ها برای کودکان دشوار بوده، آن‌ها را می‌توان با رهنمایی و مساعدت بزرگ‌سالان یا کودکان ماهرتر یاد داد. و ناحیهٔ رشد تقریبی را شکاف میان توانایی‌های بالفعل و استعدادهای بالقوهٔ متعلم که با کمک افراد بزرگ‌تر قابلیت بالفعل‌رسیدن را دارد، بیان می‌کنند (دلاور، 1387).

با توجه به وضعیت صنوف درسی، محصلان با سطوح استعداد و سرعت یادگیری ریاضی متفاوت در آن حضور دارند و استاد شاید نتواند پاسخ‌گوی تمام محصلان، متناسب با سطح خود آن‌ها در صنف باشد. به نظر می‌رسد با استفاده از ابزارها از قبیل: قلم و کاغذ، خط‌کش، پرگار، کمپیوترها و ماشین حساب‌ها در صنوف درسی که محصلان بازخورد لازم را دریافت نموده و با تعامل با آن یاد بگیرند، می‌توان مفکوره‌های ویگوتسکی را تحقق بخشید. ابزارها در این‌جا نقش استاد و محیط اجتماعی مورد نظر ویگوتسکی که توانایی بالقوهٔ محصل را به بالفعل می‌رساند، ایفا می‌نماید.

نظریهٔ برونر

به گفتهٔ سیف (1389) برونر نیز مانند پیاژه مفاهیم نظری خود را از تحقیقاتی‌که با کودکان انجام داده، به دست آورده است. او در مشاهدات خود به این نتیجه رسید که کودکان در سه مرحلهٔ متمایز رشد، یعنی در *مرحلهٔ حرکتی، تجسمی و نمادی*، جهان هستی را در ذهن خود بازنمایی می‌کنند. در مرحلهٔ حرکتی کودکان روی‌دادهایی را که تجربه می‌نمایند به‌صورت پاسخ‌های حرکتی یا عملی بازنمایی می‌کنند. در مرحلهٔ بازنمایی تصویری یا تجسمی کودک روی‌دادهای زنده‌گی خود را غالباً به‌صورت تصاویر ذهنی حفظ می‌نماید و مرحلهٔ بازنمایی نمادی با کسب یک نظام نمادی فرا می‌رسد. زبان عمده‌ترین نظام نمادی مورد استفادهٔ انسان است. آدمیان به کمک زبان تجارب زنده‌گی خود را به رمز درمی‌آورند و آن را ذخیره می‌کنند.

غلام‌آزاد (1390) دربارهٔ کاربردهای آموزشی نظریهٔ برونر بیان می‌کند که در نظریهٔ برونر معلم باید صنف را به گونه‌یی سازمان دهد که یادگیرنده‌گان از طریق ارتباط فعال خود با موضوع درسی یاد بگیرند؛ یعنی باید آنان را تشویق و تحریک کند تا به تجربه وآزمایش دست بزنند و از این راه دانش علمی برای خود کشف نمایند. برونر معتقد است که هر نظریهٔ آموزشی باید حد اقل دارای چهار خصوصیت اصلی باشد که عبارتند از: آماده‌گی، سازمان‌دهی، تسلسل و تقویت. او تلاش کرده است که این خصوصیات را در نظریهٔ آموزشی خود پیاده کند. به‌طور خلاصه اصولی‌که از نظریهٔ برونر نشأت می‌گیرد، اصول زیر می‌باشد:

- ✓ آموزش باید متناسب با تجاربی باشد که متعلم را علاقه‌مند کند و او را قادر به یادگیری سازد؛
- ✓ آموزش باید طوری طراحی شود که بتواند به ساده‌گی توسط متعلم درک شود؛
- ✓ آموزش باید طوری طراحی شود که استنتاج را تسهیل کند.

تال (2002) سه نوع بازنمایی نظریهٔ برونر را به‌صورت زیر بیان می‌کند:

1. حرکتی (بازنمایی در عمل)؛
2. تجسمی (خلاصه‌کردن تجسم و سازمان حسی)؛
3. نمادی (زبان، عدد و منطق).

تال (2002) مطرح می‌کند که رشد واسطه‌های پیش‌رفتهٔ کمپیوتری تا اندازه‌یی نظریهٔ برونر را نشان می‌دهد؛ چرا که متضمن استفاده از واسطهٔ حرکتی، آیکون‌ها به‌صورت تصاویر خلاصه‌شده برای نمایش گزینه‌های قابل انتخاب، نمادگذاری از طریق صفحهٔ کلید ورودی و پردازش درونی می‌باشد (غلام‌آزاد، 1390: ص94).

نظریهٔ ساخت و سازگرایی

زِنگ و همکاران (2006) با پیشنهاد روش ساخت و سازگرایی برای تدریس ریاضیات گسسته که در آن دانش توسط یادگیرنده و بر پایهٔ دانسته‌های خود او بنا می‌شود، بیان می‌کنند که بسیاری از محصلان اظهار می‌کنند که یادگیری مفاهیم، فورمول‌ها و اصول موضوع آن راحت است؛ اما کاربرد آن در حل مسایل کاربردی دشوار است. این به معنای آن است که دانش در ریاضیات گسسته برای ادراک سخت نیست؛ پس، چرا این‌قدر محصلان فکر می‌کنند که یادگیری ریاضیات گسسته مشکل است؟ بعد از مشاهدهٔ محصلان در صنف درس و گفت‌وگو با آن‌ها، محققان نتیجه گرفتند که علت آن این است که محصلان فقط اطلاعات را دریافت می‌کنند، آن‌ها در ذهن خود پردازش نمی‌کنند تا شناخت خود را شکل دهند. در ضمن، آن‌ها هیچ فرصتی برای بحث ادراک خود با سایر محصلان و برای ارزیابی این‌که آیا شناخت تشکیل یافتهٔ آن‌ها از دانش دریافت‌شده صحیح است یا خیر، ندارند. بنابراین، جایگاه ارتباط باید در صنف درس ریاضیات گسسته برای محصلان فراهم گردد تا آن‌ها بتوانند با یک‌دیگر بحث و گفت‌وگو نمایند (پولیا، ۱۳89: ص54).

گلیت (2007) بیان می‌کند که نرم‌افزار کمپیوتری جریان‌های پردازش را برای یادگیری ساخت‌وسازگرایانه حمایت می‌کند. به علاوه، تصاویر می‌توانند با نرم‌افزار پردازش تصویری دستکاری شوند. این ابزارهای تجسم می‌تواند به عنوان «ابزارهای ذهنی» برای انکشاف و سازمان‌دهی مجدد

ساختارهای شناختی یادگیرنده در طول یادگیری مورد توجه قرار گیرد. یادگیرنده‌گان می‌توانند روش-های گرافیک را برای سازمان‌دهی تفکر خود شان به همان صورتی‌که دانش مفاهیم را می‌سازند مورد استفاده قرار دهند (سیف، 1389). می‌توان نتیجه گرفت که محصلان در کارکردن با ابزارهای تکنالوژیکی از قبیل نرم‌افزارهای تعاملی پویا می‌توانند طبق روش‌های یادگیری پیشنهادشده توسط نظریهٔ ساخت‌وسازگرایی یادگیری بهتری داشته باشند؛ زیرا در صنوف درسی‌یی‌که از تکنالوژی استفاده می‌شود، می‌توان گفت که محصل تکالیف متناسب با سطح دانش و سرعت یادگیری خود داشته و روی‌کرد محصل محوری مسلط می‌شود. پس، می‌توان گفت که نظریهٔ ساخت‌وسازگرایی که مورد تأکید محققان آموزشی است، از طریق تکنالوژی‌های آموزشی مناسب بهتر تحقق می‌یابد.

نظریهٔ تفکر هندسی وِن هیل

در سال ۱۹۵۹م دینا وِن‌هیل- گُلدف و همسرش پی‌یر وِن‌هیل که هردو معلم ریاضی بودند، با استناد به مشکلات یادگیری هندسه در متعلمان، نظریه‌یی مشتمل بر سطوح تفکر هندسی را بنا نهادند. این نظریه به بررسی این موضوع می‌پرداخت که چرا متعلمان با استدلالی‌که همان جنبه‌های تکمیلی انکشاف بینش در هندسه استند، مشکل دارند. کارول (1998) و فویز و همکاران (1988) بیان می‌کنند که متعلمان در بسیاری از مکاتب دورهٔ متوسطه و لیسه، تجارب کافی برای استدلال در مورد ایده‌های هندسی را ندارند (به نقل از بایرام، 2004). مشاهدات این دو مدرس در صنف هندسه به آن‌ها در انکشاف یک نظریه از سطوح تفکر هندسی در متعلمان کمک کرد. این سطوح به جای این‌که مقدار دانشی را که آن‌ها دارند بیان کند، تعریف می‌کند که آن‌ها در مورد چه نوع مفاهیم هندسی و چگونه فکر می‌کنند (مرادی، ۱۳۹۴: ص۲۲).

وِن‌هیل تأکید دارد که آموزش نقش مهمی در کمک به متعلمان برای انتقال از یک سطح به سطح بعدی ایفا می‌کند. در این مودل، لازم است که متعلمان در فعالیت‌های معینی شرکت کنند و بعضی از ویژه‌گی‌های مرتبط با مفاهیم هندسی را در جهت کسب اهداف خواسته شده، کشف نمایند (گوتی‌ارز، 1992؛ به نقل از مرادی، 1394). وِن‌هیل (1986) به این موضوع اشاره کرد که «بسیاری از ایده‌های ساختاری که من انکشاف داده‌ام از نظریهٔ گشتالت گرفته می‌شوند.» پی‌یر وِن‌هیل مفاهیم سطوح را از ژان پیاژه گرفت؛ هرچند که او با پیاژه در چندین مورد اختلاف نظر داشت. او قواعد روان‌شناسانه را فورمول‌بندی کرد و دینا وِن‌هیل گلدوف روی تجربهٔ تعلیمی برای بالابردن سطوح تفکر متعلمان متمرکز شد (ریحانی، 1384).

نظریهٔ وِن‌هیل تأکید می‌کند که «یک زمینهٔ انکشاف‌یافتهٔ سیستماتیکی از دانش باید در همه جنبه‌های هندسه قبل از این‌که متعلم قادر به دست‌یابی به مرحلهٔ تئوری باشد، حاصل شود (تپو، 1991؛ به نقل از مرادی، 1394).

نظریهٔ وِن‌هیل ادراک متعلمان از هندسه را به پنج سطح طبقه‌بندی می‌کند و تحول در درون این سطوح به این ترتیب است که ادراک متعلمان از هندسه از سطوح پایین به سطوح بالا منتقل می‌شود. این سطوح معلومات دربارهٔ دانش فرد نمی‌دهد؛ بلکه بیان می‌کند که شخص در یک سطح خاص چگونه در مورد مفاهیم هندسی فکر می‌کند. پیش‌رفت در یادگیری هندسه مستلزم پشت سر گذاشتن به ترتیب سطوح وِن‌هیل است. این سطوح تفکر هندسی که توسط وِن‌هیل ارائه شده است، عبارت از:

سطح یک- تشخیص یا دیداری (Recognition/Visualization): متعلمان به مفاهیم هندسی به‌عنوان وجود مطلق نگاه می‌کنند. در این سطح آن‌ها از فضا آگاه استند، آن هم به این صورت که فضا چیزی است که ما را احاطه کرده است. به‌طور کلی اشکال هندسی تنها به وسیلهٔ شکل شان و نه به وسیلهٔ ویژه‌گی‌های شان شناخته می‌شوند. در این مرحله متعلمان اشکال هندسی پایه را با توجه به ظاهر شان می‌شناسند.

سطح دو- تجزیه و تحلیل (Analysis): متعلمان در این سطح می‌توانند خصوصیاتی از اشکال را بررسی کرده و اشکال را بر حسب این ویژه‌گی‌ها تجزیه و تحلیل کنند. از این‌رو دسته‌بندی اشکال در این سطح با توجه به ویژه‌گی آن‌ها صورت می‌گیرد.

سطح سه- استنتاج غیر رسمی یا مرتب‌سازی (Informal Deduction): در این سطح، متعلمان یک شبکه‌یی از اشکال و روابط را توسعه می‌دهند. آن‌ها نه‌تنها قادر به تشخیص ویژه‌گی‌های درونی هر شکل استند، بلکه خواهند توانست روابط بین این ویژه‌گی‌ها را در اشکال متفاوت شناسایی کنند. علاوه بر این، قادرند تعاریف کاملی را شکل دهند تا به‌طور واضح بتوانند آن‌ها را به‌کار گیرند.

سطح چهار- استنتاج رسمی (formal Deduction): متعلمان در این سطح روابط درونی و نقش اجزای تشکیل‌دهندهٔ یک سیستم اصول موضوعه مانند عبارات تعریف‌نشده، مفروضات، تعاریف، قضیه‌ها و... را درک می‌کنند. آن‌ها می‌توانند راه‌های مختلف اثبات یک قضیه را درک کرده و روند اثبات را دنبال کنند. هم‌چنین آن‌ها قادرند تفاوت بین شرایط لازم و کافی را تشخیص دهند، حدس بزنند و این حدس را به‌طور استنتاجی بازبینی کرده و از صحت و سُقم آن آگاه شوند.

سطح پنج- دقت (Rigor): در این سطح متعلمان می‌توانند شبکه‌یی از ارتباطات را انکشاف دهند و قادرند قضیه‌ها را در سیستم‌های اصول موضوعه متفاوت به‌طور دقیق مشخص کنند. آن‌ها می‌توانند

تعداد گوناگونی از سیستم‌های اصول موضوعه را با هم مقایسه کنند و از این راه کشف کنند که چگونه تغییرات در اشکال هندسی ایجاد می‌گردد. متعلم در این سطح قادر است که مطالعهٔ عمیقی از موضوع انجام دهد و بینش‌های جدید و راه‌بردهایی به استنتاج منطقی را پرورش دهد.

نظریهٔ وِن‌هیل شامل سطوح فوق، تفکری است که متعلمان در ضمن یادگیری هندسه از آن‌ها عبور می‌کنند و علاوه بر این توضیح می‌دهد که چرا متعلمان در یادگیری هندسه با مشکل مواجه می‌شوند. این مودل نظری شامل دو قسمت سطوح تفکر و مراحل آموزشی می‌باشد (حلیمی، ۱۳۹۸: صص-۲۴ 25).

با توجه به این نکته که از اوایل دههٔ ۸۰ میلادی نظریهٔ وِن هیل در زمینهٔ سطوح تفکر هندسی مورد توجه گستردهٔ بین‌المللی قرار گرفته است. نظریهٔ وِن هیل در زمینهٔ یادگیری هندسه از مطرح‌ترین نظریه‌های یادگیری در دهه‌های اخیر می‌باشد (ریحانی، 1384).

بحث و نتیجه‌گیری

از آن‌جا که علت بسیاری از ناکامی‌ها در زمینهٔ یادگیری ریاضی عدم شناخت کافی از نحوهٔ ساخت نقشهٔ مفهومی ریاضی محصلان می‌باشد، لذا هدف از این تحقیق تولید مسیری بود که بتوان به آن به‌عنوان مبنایی برای درک تفکر ریاضی محصلان بر اساس نظریه‌های آموزشی رجوع کرد. در واقع در دست داشتن ابزاری برای درک تفکر ریاضی محصلان به استادان کمک خواهد کرد تا بتوانند صریحاً تشخیص دهند که هر محصل در چه سطحی از شناخت نسبت به مفاهیم ریاضی قرار دارد و از این رهگذر مربیان با اطمینان بیش‌تری بتوانند مواد آموزشی مورد نیاز یادگیرنده‌گان را در اختیار شان قرار دهند. آشکارشدن عوامل پنهانی که در شکل‌دهی سازهٔ تفکر ریاضی مؤثر است می‌تواند به‌صورت یک روش علّی در جهت مقاصد آموزشی کاربرد داشته باشد. تدریس ریاضی واقع‌گرایانه بر تجارب قابل استفاده و مفید محصلان بر ارتباط دنیای واقعی و دنیای ریاضی تأکید می‌کند؛ یعنی محصلان سطوح مختلفی از درک را که در آن ریاضی‌سازی می‌تواند اتفاق افتد طی می‌کنند.

ژان پیاژه درک صحیح در ریاضی را از طریق جریان ریاضی‌سازی مفاهیم به‌صورت سازمان‌بندی یک جنبهٔ تفکر ریاضی تعریف می‌کند؛ این بدان معنا است که وقتی محصل مفاهیم ریاضی را یاد می‌گیرد و آن را سازمان‌بندی می‌کند، قادر به تفکّر دربارهٔ مفاهیم بعدی ریاضی می‌باشد. در این مرحله محصل می‌تواند درک صحیحی از ریاضی را انکشاف دهد. از نظر ویگوتسکی ریاضی‌سازی ذهنی هستهٔ اصلی تدریس ریاضی است.

پیاژه و ویگوتسکی تیوری‌هایی در زمینهٔ نظریهٔ ساخت‌گرایی ارائه داده‌اند. برنامه‌های ویگوتسکی و پیاژه اساساً در جهت یادگیری‌های پایه‌یی متفاوت است. *پیاژه کودک را به‌صورت یک دانشمند کوچک توصیف می‌کند که عمدتاً به تنهایی جهان هستی را می‌سازد و می‌فهمد. ویگوتسکی بر این باور است که رشد شناختی کودک عموماً به مردمی که در دنیای او زنده‌گی می‌کنند وابسته است.* با توجه به مطالب ارائه‌شده از این نوع یادگیری واضح است که بیش‌ترین کاربرد آن در زمینهٔ یادگیری علوم مفهومی مانند ریاضی است.

ویگوتسکی جنبه‌های فرهنگی، تاریخی و اجتماعی را در رشد شناختی بسیار بااهمیت می‌داند و به باور او کنش متقابل میان یادگیرنده و محیط اجتماعی‌اش تعیین‌کنندهٔ اصلی رشد شناختی اوست. یکی از مفاهیم اصلی نظریهٔ ویگوتسکی منطقهٔ تقریبی رشد نام دارد که اهمیت تعامل اجتماعی را در رشد و یادگیری نشان می‌دهد. ویگوتسکی معتقد است که جریان‌های رشد به دنبال جریان‌های یادگیری رخ می‌دهد.

برونر تأکید روی واقعی‌سازی مفاهیم ریاضی در ذهن متعلم دارد. در واقع این نظریهٔ وی برخلاف روش‌های سنتی تدریس ریاضی سعی می‌کند تا ریاضی را از حصار کتاب بیرون کشیده و آن را در دنیای واقعی بازنمایی کند و به این ترتیب قالب خشک و انتزاعی آن را شکسته و در شکلی قابل لمس برای متعلمان ارائه دهد. روی هم رفته آموزش ریاضی چهارچوبی است که جنبه‌های اهداف کوتاه‌مدت و بلندمدت تدریس را باهم ادغام کرده و در واقع روی این موضوع که چگونه متعلم و یا محصل می‌تواند نقش مؤثری در آموزش و پیش‌رفت خود داشته باشد، تأکید می‌کند.

وِن هیل تأکید می‌کند که یک زمینهٔ انکشاف‌یافتهٔ سیستماتیکی از دانش باید در همه جنبه‌های هندسه قبل از این‌که متعلم قادر به دست‌یابی به مرحلهٔ نظری باشد، حاصل شود. وِن هیل ادراک متعلمان از هندسه را به پنج سطح طبقه‌بندی می‌کند و تحول در درون این سطوح به این ترتیب است که ادراک متعلمان از هندسه، از سطوح پایین به سطوح بالا منتقل می‌شود. این سطوح اطلاعاتی دربارهٔ دانش فرد نمی‌دهد؛ بلکه بیان می‌کند که شخص در یک سطح خاص چگونه در مورد مفاهیم هندسی فکر می‌کند. پیش‌رفت در یادگیری هندسه مستلزم پشت سر گذاشتن به ترتیب سطوح است. محققان در تشخیص ویژه‌گی‌های انفرادی که یادگیرنده‌گان در هر سطح دارند، دچار مشکل استند؛ زیرا تفکیک این ویژه‌گی‌ها به علت قرابت به هم بسیار مشکل می‌باشد و تا کنون مودل‌بندی کاملی از آن‌ها ارائه نشده است. با آن‌هم این نظریه در زمینه سطوح تفکر هندسی مورد توجه گستردهٔ بین‌المللی قرار گرفته و در بسیاری از کشورها یکی از مهم‌ترین عوامل مؤثر در پروگرام درسی هندسهٔ مکاتب به‌شمار می‌رود.

بنابراین، با توجه بر اهمیت یادگیری ریاضیات آنچه همواره مورد نظر محققان بوده است، این است که بتوانند چهارچوب‌های نظری مستحکمی برای ارتقا و پیش‌رفت یادگیرنده‌گان بنا کنند. تا بر این اساس، یادگیری از شکل انفعالی و حفظ‌کردن مطالب درسی خارج شده و در جهت یادگیری فعال تغییر کند و محیط‌های یادگیری را بیش از پیش تعاملی، فعال و مشارکتی نمایند. در محیط‌های یادگیری فعال متعلمان و محصلان به فعالیت‌های مشارکتی روی می‌آورند، تفکر انتقادی و خلاق پیدا می‌کنند و در مورد جریان‌های یادگیری خود تأمل و تعمق می‌کنند. اکثر نظریه‌های آموزشی بر روی روش‌های تدریس تمرکز کرده‌اند. بنابراین، با توجه به نظریات محققان و آموزشگران ریاضی، نظریه‌های آموزشی دارای توانایی‌های فراوانی برای کمک به رفع مشکلات یاددهی و یادگیری ریاضیات است.

منابع

- ایمل، عبدالحق. (۱۳۹۰). میتود تدریس ریاضی. مترجم: محمدانور غوری، کابل.
- احمدی، غلام‌علی و ابراهیم ریحانی. (۱۳۸۹). راهبردهای آموزش حل مسألهٔ ریاضی. انتشارات مجلهٔ آموزشی و پژوهشی مدارس، شمارهٔ نهم، دورهٔ بیست و چهارم، تهران.
- بهین، نورالدین. (۱۳۸۳). چگونه‌گی آموزش و نقش ریاضیات در فرایندهای تفکر. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شماره ۷۱.
- بخش‌علی‌زاده، شهرناز. (۱۳۸۹). روش تدریس ریاضی در دورهٔ ابتدایی. تهران: انتشارات سمت.
- بابلیان، محسن. (۱۳۹۷). دقت و پایداری یادگیری ریاضی دانش‌آموزان. تهران: انتشارات سمت.
- پولیا، جورج. (۱۳۸۲). خلاقیت ریاضی. مترجم: پرویز شهریاری، تهران: انتشارات مؤسسهٔ فاطمی.
- پولیا، جورج. (۱۳۸۶). چگونه مسأله را حل کنیم. مترجم: احمد آرام، تهران: انتشارات دوران، ص۵۴.
- تبریزی، مصطفی. (۱۳۸۹). درمان اختلالات ریاضی. تهران: انتشارات فراوان.
- چانگ، پالمر. (۱۳۸۴). کاربرد سه اصل مهم آموزشی در یادگیری محوری. مترجم: عشرت زمانی، مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شماره هشتم.
- حلیمی، محمد. (۱۳۹۸). پایاسازی و هنجاریابی آزمون سطوح تفکر هندسی بر اساس تیوری ون هیل. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ تحقیقات آموزشی. اهواز: دانشگاه شهید چمران: اهواز، صص4-9 ، 24-25.
- دلاور، علی و کیانوش زهراکار. (1387). سنجش و اندازه‌گیری در روان‌شناسی یادگیری. تهران: ارسباران.
- رضوی، شریف. (۱۳۹۴). سنجش، فرایند و فرآوردهٔ یادگیری ریاضی: روش‌های قدیم و جدید. تهران: انتشارت دوران، ص۲۴۳.
- ریحانی، ابراهیم. (1384). معرفی نظریهٔ پیاژه و فن هیلی در مورد یادگیری هندسه. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شماره 80، تهران، صص18-14.

- سرمد، زهره. (1388). آموزش روش‌های نوین در علوم رفتاری. تهران: انتشارات آگاه.
- سیف، علی‌اکبر. (1387). روان‌شناسی پرورش نوین (روان‌شناسی آموزش و یادگیری). ویرایش ششم، تهران: انتشارات دوران، صص33 -157 – ۳۰۲ -514.
- سیف، علی‌اکبر. (1389). مقدمه‌یی بر نظریه‌های یادگیری. ویرایش پنجم، تهران: انتشارت دوران، صص۲۲-۲۰.
- شهریار، صالح. (1396). نقش نظریهٔ ویگوتسکی در آموزش ریاضیات مدرسه. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شماره 57، تهران، 117-۱۱۶.
- حاتمی، جواد و دیگران. (1388). بهبود کیفیت آموزش مفاهیم درس ریاضی به کمک نقشه‌های مفهومی. نشریهٔ علمی پژوهشی فناوری آموزش، جلد 2، شماره 3.
- علم‌الهدایی، سید حسن. (۱۳۸۷). نقش تاریخ ریاضیات در آموزش و یادگیری ریاضی. مجلهٔ فرهنگی و اندیشه‌های ریاضی، شماره ۲۲، تهران.
- عماری، کریم. (۱۳۹۷). راهبردهای نوین در آموزش ریاضی. تهران: انتشارات شیوه، ص138.
- غلام‌آزاد، سهیلا. (1379). روی‌کردهای نوین آموزش هندسه. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شماره‌های 59-60، تهران.
- غلام‌آزاد، سهیلا. (۱۳۹۰). اصول آموزش ریاضی. نشر دانشگاه شهید رجایی، تهران، صص92-94.
- کرامتی، محمدرضا. (۱۳۸۹). تأثیر یادگیری مشارکتی بر پیش‌رفت تحصلی دانش‌آموزان در درس ریاضی در مفهوم جبر. مجلهٔ روان‌شناسی و علوم تربیتی، شماره چهلم، دورهٔ چهارم.
- گویا، زهرا و عبدالله حسام. (۱۳۹۲). نقش طرح‌واره‌ها در شکل‌گیری بدفهمی‌های ریاضی دانش‌آموزان. مجلهٔ رشد آموزش ریاضی، شماره ۸۲.
- مصلحیان، محمدوصال. (۱۳۸۴). فلسفهٔ ریاضی. شیراز: انتشارات واژگان خرد.
- مرادی، اصغر. (۱۳۹۴). مطالعهٔ جایگاه هندسهٔ مدرسه‌یی در برنامهٔ درسی کارشناسی دبیری ریاضی مبتنی بر نظریهٔ وِن هیل. پایان‌نامهٔ کارشناسی ارشد در رشتهٔ آموزش ریاضی. تهران: دانشگاه شهید رجایی، ص۲۲.
- مددپور، محمد. (۱۳۸۶). نظری به اندیشه‌های هوش‌مندانه در باب یادگیری. تهران: انتشارت دانشیار.
- ملودی، دوکا. (۱۳۸۶). بررسی عوامل مؤثر بر پیش‌رفت تحصیلی. نهمین کنفرانس آموزش ریاضی، کرمان، ص۴۴.
- نورزاد، عبدالسمیع. (۱۳۸۹). چگونه ریاضی بیاموزیم. کابل: انتشارات سعید.
- هرگنهان، بی.آر و متیواچ والسون. (۱۳۸۳). مقدمه‌یی بر نظریه‌های یادگیری. مترجم: علی‌اکبر سیف، تهران: انتشارات دوران، صص۵۴-58.

Pusey, Eleanor Louise. (2003). The van hiele model of reasoning ingeometry: a literature review. A thesis submitted to the Graduate Faculty of North Carolina State University in partial fulfillment of the requirements for the Degree of Master of Science in Mathematics Education.

© Author(s) 2024. This work is distributed under https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/