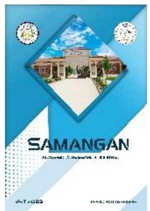
Samangan Scientific and Research Journal

https://researchsparker.edu.af/index.php/SARJ

DOI: 10.64226/sarj.v3i01.101

e-ISSN:3105-1715

ISSN: 3006-8835



Numerical error analysis in solving ordinary differential equations with emphasis on the accuracy and stability of classical methods

Wahidullah Niazi [1,*], Enayatullah Enayat[1]

[1]*Department of Mathematics, Faculty of Education, Samangan University*

[*] *Corresponding Author:* wahidniazi2020@gmail.com

Cite this study: Niazi, W., & Enayat, E. (2025). Numerical error analysis in solving ordinary differential equations with emphasis on the accuracy and stability of classical methods, Samangan Scientific and Research Journal, 3(1), 50-65.

Keywords

Ordinary differential equations,
Numerical methods,
Euler method,
Huen's method,
Numerical error analysis

Research

Received:2025-09-15
Revised: 2025-11-02
Accepted:2025-11-14
Published:2025-12-30

Abstract

Ordinary differential equations (ODEs) play a crucial role in modeling various natural, physical, engineering, and biological phenomena. In most cases, analytical solutions to these equations are not possible or practical; therefore, the use of numerical methods to find approximate solutions is essential. The aim of this paper is to carefully review classical numerical methods, including Euler, Heuwen, and fourth-order Runge–Kutta (RK4), in solving ordinary differential equations. The primary focus is on analyzing numerical error, the stability of the methods, and the accuracy of the results obtained from each algorithm. First, basic concepts related to types of errors, including local and global errors, are presented. Then, convergence and stability criteria in numerical methods are explained. Each of the methods mentioned is introduced and analyzed separately, and then they are used to solve a simple experimental differential equation numerically. The results obtained from the numerical implementation are reviewed through tables and comparative analyses. Comparing the approximate values with the analytical answer shows that the fourth-order Runge–Kutta method has significantly higher accuracy than the Euler and Heun's methods and is also more suitable for slowly decaying issues. It was also observed that reducing the time interval leads to a reduction in error in all methods, but at the cost of increasing computational cost. Finally, the paper provides guidance on selecting the most suitable method, taking into account the problem's characteristics, the desired level of accuracy, and computational constraints. This research can be useful for students and researchers in the field of applied mathematics and engineering.

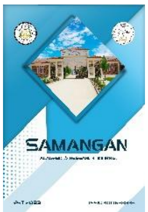
مجلهٔ علمی–تحقیقی سمنگان

https://researchsparker.edu.af/index.php/SARJ

DOI: 10.64226/sarj.v3i01.101

e-ISSN:3105-1715

ISSN: 3006-8835



تحلیل خطای عددی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی با تاکید بردقت و پایداری روش‌های کلاسیک

وحید الله نیازی[۱،*]، عنایت الله عنایت[۱]

[۱] *دیپارتمنت ریاضی، پوهنحی تعلیم و تربیه، مؤسسهٔ تحصیلات عالی سمنگان*

*** نویسنده مسؤول:** wahidniazi2020@gmail.com

مرجع‌دهی: نیازی، و.، و عنایت، ع. (۱۴۰۴). تحلیل خطای عددی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی با تاکید بر دقت و پایداری روش‌های کلاسیک, ۳(۱), ۶۵-۵۰.

چکیده

معادلات دیفرانسیل معمولی (ODE) ها نقش مهی در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی، فیزیکی، انجینری و زیستی دارند. در اغلب موارد، حل تحلیلی این معادلات ممکن یا عملی نیست و بنابراین استفاده از روش‌های عددی برای یافتن پاسخ‌های تقریبی، امری ضروری است. هدف این مقاله بررسی دقیق روش‌های عددی کلاسیک از جمله اویلر، هیون و رانگه–کوتا مرتبه چهارم (RK4) در حل معادلات دیفرانسیل معمولی است. تمرکز اصلی بر تحلیل خطای عددی، پایداری روش‌ها، و دقت نتایج حاصل از هر الگوریتم قرار دارد. ابتدا مفاهیم پایه‌ای مربوط به انواع خطاها از جمله خطای محلی و خطای کلی ارائه شده و سپس معیارهای همگرایی و پایداری در روش‌های عددی توضیح داده شده است. و هر یک از روش‌های ذکرشده به‌صورت جداگانه معرفی و تحلیل شده‌اند، سپس از آن‌ها برای حل یک معادله دیفرانسیل ساده آزمایش به صورت عددی استفاده شده است. نتایج حاصل از اجرای عددی، از طریق جداول و تحلیل‌های مقایسه‌ای و بررسی شده‌اند. مقایسه مقادیر تقریبی با پاسخ تحلیلی نشان می‌دهد که روش رانگه–کوتا مرتبه چهارم دقت بسیار بالاتری نسبت به روش اویلر و هیون دارد و برای مسائل کند زوال نیز مناسب‌تر است. همچنین مشاهده شد که کاهش فاصله زمانی منجر به کاهش خطا در تمامی روش‌ها می‌شود، اما به قیمت افزایش هزینه محاسباتی. در نهایت، مقاله پیشنهادهایی برای انتخاب روش مناسب بر اساس ویژگی‌های مسئله، میزان دقت مورد نظر، و محدودیت‌های محاسباتی ارائه می‌کند. این تحقیق می‌تواند برای محصلان و محققان در حوزه ریاضی کاربردی و انجینری مفید باشد.

کلمات کلیدی

معادلات دیفرانسیل معمولی،
روش‌های عددی،
روش اویلر،
روش هیون،
تحلیل خطای عددی

۱.مقدمه

معادلات دیفرانسیل معمولی۱(ODE) ابزار بنیادی در مدل‌سازی بسیاری از پدیده‌های فیزیکی، بیولوژیکی و انجینری به شمار می‌روند (Boyce & Diprima,2017). این معادلات چارچوبی ریاضی برای توصیف تغییرات پدیده‌ها در طول زمان یا فضا فراهم می‌کنند (حسینی، ۱۳۹۵). از حرکت ذرات در میخانیک کلاسیک گرفته تا مودل سازی رشد جمعیت، انتشار مریضی‌های عفونی و تحلیل مدارهای الکترونیکی، همه در قالب معادلات دیفرانسیل قابل بیان هستند (Burden & Faires, 2011). با وجود اهمیت این معادلات، در بسیار موارد یافتن حل تحلیلی این معادلات امکان‌پذیر نیست یا بسیار پیچیده و زمان‌بر است. در چنین شرایطی، روش‌های عددی نقش کلیدی در حل تقریبی این معادلات ایفا می‌کنند (Ascher & Petzold, 1998). در میان روش‌های عددی، روش‌های کلاسیکی چون روش اویلر[۲۱] ، روش اویلر بهبود یافته و روش رانگه-کوتا[۳] از پر کاربردترین و در عین حال ساده‌ترین روش‌ها برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی ها محسوب می‌شوند. این روش‌ها به دلیل سادگی مفهومی و سهولت پیاده سازی، معمولا اولین انتخاب در آموزش و کاربردهای عملی محسوب می‌شوند. با این حال محدودیت‌هایی همچون دقت پایین در برخی شرایط، نیاز به فاصله های زمانی کوچک، و حساسیت به خطای گردشدگی باعث می‌شود تحلیل دقیق عملکرد آن‌ها ضروری شود. با وجود سادگی این روش‌ها، بررسی و تحلیل دقت و پایداری آن‌ها از اهمیت زیادی برخوردار است، به ویژه در مسائل حساس به خطا یا مدل‌هایی که در زمان بلند مدت شبیه‌سازی می‌شوند (جعفری، ۱۳۹۷).

اگر چه روش‌های کلاسیک عددی قادر به ارایه جواب‌های تقریبی هستند، اما کیفیت و پایداری این جواب‌ها همواره تضمین شده نیست. به ویژه در شبیه سازی‌های بلند مدت یا در مودل هایی که حساسیت بالایی به خطا دارند، انتخاب نادرست روش یا عدم توجه به ویژگی‌های پایداری می‌تواند منجر به انحرافات چشمگیر از جواب واقعی شود (Hairer et al.,1993). بنابراین نیاز است که خطای عددی این روش‌ها به طور دقیق تحلیل شده و شرایط پایداری آن‌ها مشخص گردد. تا کاربر بتواند متناسب با نوع مسئله، روش مناسب را انتخاب نماید.

بررسی پیشینه نشان می‌دهد که از دیر زمان تحلیل خطا و پایداری مورد توجه محققان قرار داشته است. مطالعات متعددی در سطح بین‌المللی به مقایسه روش‌های مختلف پرداخته‌اند و نشان داده‌اند که هر روش در شرایط خاصی مزایا و معایب خود را دارد (Burden & Faires, 2011). برای مثال، روش رانگه-کوتا در مقایسه با اویلر از دقت بیشتری برخوردار است، اما نیازمند محاسبات بیشتر در هر فاصله می‌باشد. در مقابل، روش اویلر ساده‌تر است اما در مسائل ناپایدار سریعاً واگرا می‌شود (Boyce & Diprima, 2017). در تحقیقات داخلی نیز محققان به بررسی موارد مشابه پرداخته‌اند، اما هنوز نیاز به تحلیل جامع‌تری وجود دارد که هم به بعد نظری (تحلیل خطا و پایداری) و هم به بعد عملی (مثال‌های عددی) توجه کند (حسینی، ۱۳۹۵؛ قربانی و همکاران، ۱۳۹۹). با این حال، مرور منابع نشان می‌دهد که اغلب پژوهش‌ها تنها یکی از ابعاد خطا یا پایداری را بررسی کرده‌اند و تحلیل هم‌زمان آن‌ها کمتر صورت گرفته است؛ ازاین‌رو، خلأ پژوهشی در این حوزه وجود دارد که تحقیق حاضر در پی پر کردن آن است.

1.Ordinary Differential Equations
2.Euler

3.Runge-Kutta4Th

اهمیت این تحقیق در آن است که با تکیه بر تحلیل خطا و پایداری، می‌توان راهنمای عملی برای انتخاب روش عددی مناسب در مسائل واقعی ارائه داد. بدین ترتیب، تحقیق حاضر نه‌تنها از منظر تئوریک ارزشمند است، بلکه در کاربردهای انجینری نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد (جعفری، ۱۳۹۷).

تحلیل خطای عددی، شامل بررسی تفاوت بین جواب دقیق و جواب تقریبی تولید شده توسط الگوریتم، نقش کلیدی در ارزیابی قابلیت اعتماد و کارایی یک روش دارد (Burden & Faires, 2011). این تحلیل معمولاً به دو صورت خطای محلی[4] و خطای کلی[5] انجام می‌شود. همچنین، مفهوم پایداری عددی به ما کمک می‌کند تا بدانیم روش در برابر خطاهای گرد شدگی یا ناپیوستگی اطلاعات چگونه رفتار می‌کند (Hairer et al., 1993).

هدف اصلی این مقاله، تحلیل دقیق خطای عددی و پایداری روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل معمولی است. در این مسیر، ابتدا روش‌های مذکور م[2]عرفی شده و سپس تحلیل نظری خطای آن‌ها ارائه می‌گردد. در ادامه، با استفاده از مثال‌های عددی، عملکرد این روش‌ها از نظر دقت و پایداری مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲. روش تحقیق

۱.۲ *روش‌های عددی کلاسیک برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی*

معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول، اغلب به صورت استاندرد زیر بیان می‌شود.

$$y_0 = f(t,y) \quad , \quad \mathrm{y}(\mathrm{t}_0) = \frac{dy}{dt}$$

برای حل تقریبی این معادله در انتروال $[t_0, T]$ روش‌های عددی مختلفی وجود دارند که بر پایه‌ی فاصله زمانی $t_{n+1} - t_n = h$ عمل می‌کنند (Burden & Faires, 2011). دراین بخش، سه روش کلاسیک مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱.۱.۲روش اویلر

روش اویلر ساده‌ترین روش عددی برای حل معادله فوق است که با استفاده از تقریب خطی برای مشتق عمل می‌کند (میر هادی، ۱۳۹۸).

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

۲.۱.۲روش اویلر بهبود یافته

این روش نسخه‌ای بهبود یافته از اویلر است که از اوسط درجه میل اولیه و پیش‌بینی شده استفاده می‌کند (Hairer, Norsett & Wanner, 1993).

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

[4]Local Error

[5]Global Error

۳.۱.۲روش رانگه-کوتا مرتبه چهارم

روش رانگه-کوتا مرتبه چهار یکی از پرکاربردترین روش‌های عددی برای معادلات دیفرانسیل معمولی است که تعادل خوبی میان دقت و محاسبه دارد (Boyce & Diprima, 2017; Burden & Faires, 2011).

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = (t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = (t_n + h, \mathrm{y}_n + hk_3)$$
$$\mathrm{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

حال به بررسی و تحلیل خطای عددی سه روش معرفی شده می‌پردازیم. این تحلیل شامل دو نوع اصلی از خطا است.

خطای محلی

خطای کلی

هدف از این بخش، درک مرتبه دقت هر روش و نحوه تاثیر فاصله زمانی h بر نتایج عددی است (Boyce & Diprima, 2017; Burden & Faires, 2011).

۴.۱.۲خطای محلی

$$\tau_n = y(t_{n+1}) - \phi(t_n, y(t_n), h)$$

که ϕ بیانگر فورمول عددی روش است. این خطا معمولا با $O(h^{p+1})$ توصیف می‌شود، که در آن P مرتبه روش است (Hairer, Norsett, & Wanner, 1993).

۵.۱.۲خطای کلی

$$\mathrm{E}_n = y(t_n) - y_n$$

این خطا معمولا از مرتبه $O(h^p)$ است (Ascher & Petzold, 1998).

۲.۲ تحلیل خطا برای هر روش

۱.۲.۲ روش اویلر

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n, y_n)$$

- خطای محلی:

$$\tau_n = y''(t_n)\frac{h^2}{2} = o(h^2)$$

- خطای کلی:

$$E_n = o(h)$$ (گلشن، ۱۳۹۵)

۲.۲.۲ روش بهبود یافته اویلر

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + h, y_n + hk_1)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

- خطای محلی: $o(h^3)$
- خطای کلی: $o(h^2)$ (قربانی، ۱۳۹۹)

۳.۲.۲ روش رانگه-کوتا مرتبه۴

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$
$$k_2 = f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3 = (t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$$
$$k_4 = (t_n + h, \mathrm{y}_n + hk_3)$$
$$\mathrm{y}_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

- خطای محلی: $o(h^5)$
- خطای کلی: $o(h^4)$ (موسوی، ۱۳۹۴).

جدول ۱- مقایسه اجمالی روش‌ها:

مرتبه کلی	روش	خطای محلی	خطای کلی
۱	**اویلر**	$o(h^2)$	$o(h)$
۲	**هیون**	$o(h^3)$	$o(h^2)$
۴	**رانگه-کوتا۴**	$o(h^5)$	$o(h^4)$

۳.۲ تحلیل پایداری عددی روش‌ها

در حل عددی معادلات دیفرانسیل معمولی، تنها دقت بالا کافی نیست. اگر روش عددی پایدار نباشد، خطاهای کوچک گرد شدگی یا مقداردهی اولیه ممکن است در طول زمان رشد کرده و با عث واگرایی نتایج شود. بنابراین، تحلیل پایداری عددی بخش مهمی از ارزیابی هر روش است (حسینی، ۱۳۹۵؛ قربانی، ۱۳۹۹).

۱.۳.۲مفهوم پایداری عددی

برای بررسی پایداری، اغلب از معادله آزمایش خطی استندرد استفاده می‌شود (Boyce & Diprima, 2017).

$$\frac{dy}{dt} = y(0) \quad , \quad \lambda y = y_0$$

که $\lambda \in \mathbb{C}$ می‌تواند منفی یا مختلط باشد. جواب تحلیلی این معادله به صورت زیر است.

$$y(t) = y_0 e^{\lambda t}$$

در این معادله، اگر $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$، جواب در طول زمان کاهنده خواهد بود. روش عددی نیز باید چنین رفتاری را حفظ کند تا پایداری تلقی شود (Hairer, Norsett, & Wanner, 1993).

۲.۳.۲ معیار پایداری

برای روش عددی، اگر فورمول کلی به شکل زیر باشد.

$$y_{n+1} = y_n \cdot R(h\lambda)$$

که در آن $R(\mathrm{z})$ تابع پایداری روش است و $\mathrm{z} = \mathrm{h}\,\lambda$، آنگاه شرط پایداری این است که.

$$\left| R(\mathrm{h}\,\lambda) \right| \le 1$$

برای تمام $\mathrm{h}\,\lambda$ ها که مربوط به مدل فیزیکی هستند (حسینی، ۱۳۹۵).

۳.۳.۲ تحلیل پایداری برای هر سه روش

۱.۳.۳.۲ روش اویلر

فورمول $y_{n+1} = y_n + h\lambda\, \mathrm{y}_n = (1+h\lambda) y_n$

تابع پایداری $R(z) = z + 1$

شرط پایداری $|z+1| \le 1$

این شرط فقط زمانی برقرار است که z درون یک دایره با شعاع ۱ به مرکز $(-1, 0)$ در صفحه مختلط باشد. یعنی روش اویلر فقط برای مسیرهای زمانی بسیار کوچک و مقادیر خاصی از λ پایدار است. بنا پایداری شرطی دارد (گلشن، ۱۳۹۵).

۲.۳.۳.۲ روش هیون

فورمول:

$$k_1 = \lambda y_n$$
$$k_2 = \lambda y_n + h\lambda^2 y = \lambda(y_n + hk_1)$$
$$y_{n+1} = y_n \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$$

محاسبه:
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(\lambda y_n + \lambda \mathrm{y}_n + \mathrm{h}\,\lambda^2\, \mathrm{y}_n) = \mathrm{y}_n(1 + h\lambda + 2h^2\lambda^2)$$

پس

$$\mathrm{R(z)} = \frac{z^2}{2} + z + 1$$

که نسبت به اویلر ناحیه پایداری بزرگتری دارد، ولی هنوز پایداری شرطی است (Butcher & OHara, 2014).

۳.۳.۳.۲ روش رانگه-کوتا مرتبه۴

فورمول:

$$\mathrm{R(z)} = \frac{z^4}{24} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} + z + 1$$

گراف $|R(z)| \le 1$ نشان می‌دهد که روش رانگه-کوتا مرتبه۴ دارای ناحیه پایداری بزرگی است، اما باز هم برای حل مسائل کندزوال نیازمند فاصله زمانی کوچک است (حسینی، ۱۳۹۵).

جدول ۲- مقایسه ساحه پایداری بین روش‌ها

شماره	روش	تابع پایداری R(z)	نوع پایداری
۱	اویلر	$z+1$	شرطی، ناحیه کوچک
۲	هیون	$\frac{z^2}{2} + z + 1$	شرطی، متوسط
۳	رانگه-کوتا	$\frac{z^4}{24} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^2}{2} + z + 1$	شرطی، ناحیه بزرگ

در تحلیل پایداری هر سه روش بررسی شده **روش‌های صریح** هستند، بنابراین پایداری آن‌ها محدود به ناحیه مشخص در صفحه مختلط است. که روش رانگه-کوتا نسبت به اویلر و هیون ناحیه پایداری بزرگتری دارد و برای فاصله‌های بزرگتر مناسب است. اما برای حل مسائل کندزوال، روش‌های ضمنی (روش معکوس اویلر) پیشنهاد می‌شود که دارای پایداری بدون شرط است.

۳. نتایج

۱.۳ شبیه سازی عددی و تحلیل خطا با مثال‌های عملی

عملکرد سه روش عددی بررسی شده را از نظر دقت و رفتار عددی در حل معادلات دیفرانسیل معمولی آزمایش می‌کنیم. برای این کار، یک معادله آزمایشی را جواب تحلیلی انتخاب شده و مقادیر تقریبی به دست آمده توسط روش‌های مختلف با جواب دقیق مقایسه می‌شوند.

مثال عددی: معادله ساده با جواب تحلیلی

معادله دیفرانسیل زیر را در نظر میگیریم.

$$\frac{dy}{dt} = -2y \quad , \quad 2y = 1$$

این معادله دارای جواب تحلیلی دقیق زیر است.

$$y(t) = e^{-2t}$$

هدف ما این است که مقدار $y(1)$ را با استفاده از سه روش کلاسیک تقریب زده و سپس خطا را تحلیل کنیم.

تنظیمات عددی

- انتروال زمانی: $[0,1]$
- فاصله زمانی: h=0.1 ، سپس کاهش تا h=0.05 ، h=0.025 برای بررسی همگرایی
- تعداد فاصله‌ها: $N = \frac{1}{h}$

جدول ۳- نتایج حل عددی و حقیقی با استفاده از متلب برای هر سه روش با فاصله زمانی h=0.1

n	t_n	y_Euler	y_Heun	y_RK4	y_exact	Err_Euler	Err_Heun	Err_RK4
0	0.000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.100	0.800000	0.810000	0.818731	0.818731	0.018731	0.008731	0.000000
2	0.200	0.640000	0.656100	0.670320	0.670320	0.030320	0.014220	0.000000
3	0.300	0.512000	0.533508	0.548812	0.548812	0.036812	0.015304	0.000000
4	0.400	0.409600	0.433404	0.449329	0.449329	0.039729	0.015925	0.000000
5	0.500	0.327680	0.352801	0.367879	0.367879	0.040199	0.015078	0.000000
6	0.600	0.262144	0.288239	0.301194	0.301194	0.039050	0.012955	0.000000
7	0.700	0.209715	0.236351	0.246597	0.246597	0.036882	0.010246	0.000000
8	0.800	0.167772	0.194780	0.201897	0.201897	0.034125	0.007117	0.000000
9	0.900	0.134218	0.161109	0.165299	0.165299	0.031081	0.004190	0.000000
10	1.000	0.107374	0.133772	0.135335	0.135335	0.027961	0.001563	0.000000

جدول ۴- نتایج حل عددی و حقیقی با استفاده از متلب برای هر سه روش با فاصله زمانی h=0.05

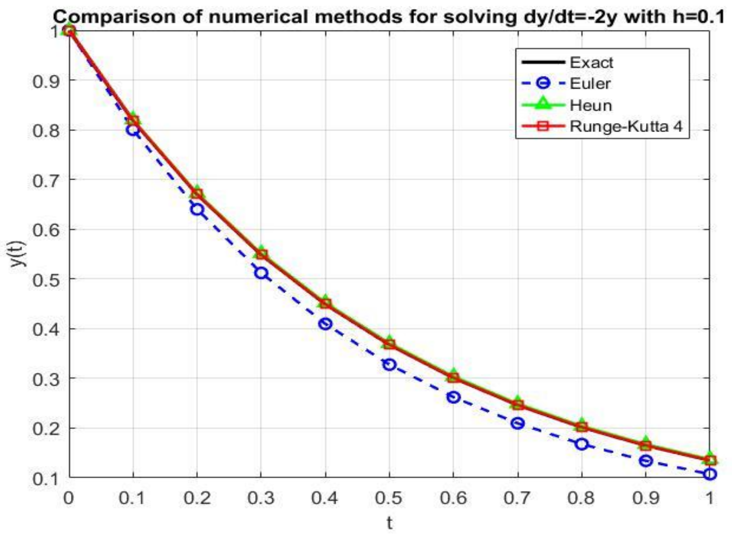
n	t_n	y_Euler	y_Heun	y_RK4	y_exact	Err_Euler	Err_Heun	Err_RK4
0	0.000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000

1	0.050	0.900000	0.905000	0.904837	0.904837	0.004837	0.000163	0.000000
2	0.100	0.810000	0.819025	0.818731	0.818731	0.008731	0.000294	0.000000
3	0.150	0.729000	0.741218	0.740818	0.740818	0.011818	0.000399	0.000000
4	0.200	0.656100	0.670802	0.670320	0.670320	0.014220	0.000482	0.000000
5	0.250	0.590490	0.607076	0.606531	0.606531	0.016041	0.000545	0.000000
6	0.300	0.531441	0.549404	0.548812	0.548812	0.017371	0.000592	0.000000
7	0.350	0.478297	0.497210	0.496586	0.496585	0.018288	0.000625	0.000000
8	0.400	0.430467	0.449975	0.449329	0.449329	0.018862	0.000646	0.000000
9	0.450	0.387420	0.407228	0.406570	0.406570	0.019149	0.000658	0.000000
10	0.500	0.348678	0.368541	0.367880	0.367879	0.019201	0.000662	0.000000
11	0.550	0.313811	0.333530	0.332871	0.332871	0.019060	0.000659	0.000000
12	0.600	0.282430	0.301844	0.301195	0.301194	0.018765	0.000650	0.000000
13	0.650	0.254187	0.273169	0.272532	0.272532	0.018345	0.000637	0.000000
14	0.700	0.228768	0.247218	0.246597	0.246597	0.017829	0.000621	0.000000
15	0.750	0.205891	0.223732	0.223130	0.223130	0.017239	0.000602	0.000000
16	0.800	0.185302	0.202478	0.201897	0.201897	0.016594	0.000581	0.000000
17	0.850	0.166772	0.183242	0.182684	0.182684	0.015912	0.000559	0.000000
18	0.900	0.150095	0.165834	0.165299	0.165299	0.015204	0.000535	0.000000
19	0.950	0.135085	0.150080	0.149569	0.149569	0.014483	0.000511	0.000000
20	1.000	0.121577	0.135822	0.135336	0.135335	0.013759	0.000487	0.000000

جدول ۵- نتایج حل عددی و حقیقی با استفاده از متلب برای هر سه روش با فاصله زمانی h=0.025

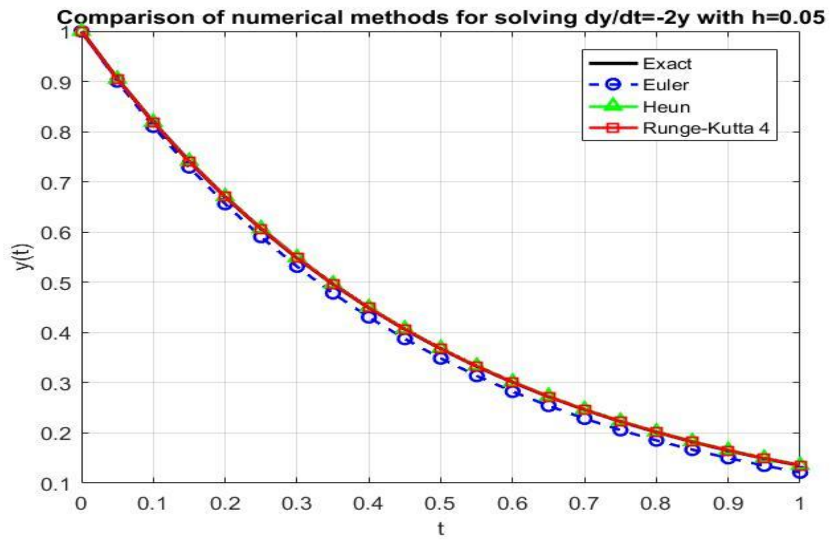
n	t_n	y_Euler	y_Heun	y_RK4	y_exact	Err_Euler	Err_Heun	Err_RK4
0	0.000	1.000000	1.000000	1.000000	1.000000	0.000000	0.000000	0.000000
1	0.025	0.950000	0.951250	0.951229	0.951229	0.001229	0.000021	0.000000
2	0.050	0.902500	0.904877	0.904837	0.904837	0.002337	0.000039	0.000000
3	0.075	0.857375	0.860764	0.860708	0.860708	0.003333	0.000056	0.000000
4	0.100	0.814506	0.818802	0.818731	0.818731	0.004225	0.000071	0.000000
5	0.125	0.773781	0.778885	0.778801	0.778801	0.005020	0.000084	0.000000
6	0.150	0.735092	0.740914	0.740818	0.740818	0.005726	0.000096	0.000000
7	0.175	0.698337	0.704795	0.704688	0.704688	0.006351	0.000107	0.000000
8	0.200	0.663420	0.670436	0.670320	0.670320	0.006900	0.000116	0.000000
9	0.225	0.630249	0.637752	0.637628	0.637628	0.007379	0.000124	0.000000
10	0.250	0.598737	0.606662	0.606531	0.606531	0.007794	0.000131	0.000000
11	0.275	0.568800	0.577087	0.576950	0.576950	0.008150	0.000137	0.000000
12	0.300	0.540360	0.548954	0.548812	0.548812	0.008452	0.000142	0.000000
13	0.325	0.513342	0.522193	0.522046	0.522046	0.008704	0.000147	0.000000
14	0.350	0.487675	0.496736	0.496585	0.496585	0.008910	0.000150	0.000000

15	0.375	0.463291	0.472520	0.472367	0.472367	0.009075	0.000153	0.000000
16	0.400	0.440127	0.449484	0.449329	0.449329	0.009202	0.000156	0.000000
17	0.425	0.418120	0.427572	0.427415	0.427415	0.009295	0.000157	0.000000
18	0.450	0.397214	0.406728	0.406570	0.406570	0.009355	0.000158	0.000000
19	0.475	0.377354	0.386900	0.386741	0.386741	0.009387	0.000159	0.000000
20	0.500	0.358486	0.368039	0.367879	0.367879	0.009394	0.000159	0.000000
21	0.525	0.340562	0.350097	0.349938	0.349938	0.009376	0.000159	0.000000
22	0.550	0.323534	0.333030	0.332871	0.332871	0.009338	0.000158	0.000000
23	0.575	0.307357	0.316794	0.316637	0.316637	0.009280	0.000158	0.000000
24	0.600	0.291989	0.301351	0.301194	0.301194	0.009205	0.000156	0.000000
25	0.625	0.277390	0.286660	0.286505	0.286505	0.009115	0.000155	0.000000
26	0.650	0.263520	0.272685	0.272532	0.272532	0.009012	0.000153	0.000000
27	0.675	0.250344	0.259392	0.259240	0.259240	0.008896	0.000151	0.000000
28	0.700	0.237827	0.246746	0.246597	0.246597	0.008770	0.000149	0.000000
29	0.725	0.225936	0.234717	0.234570	0.234570	0.008635	0.000147	0.000000
30	0.750	0.214639	0.223275	0.223130	0.223130	0.008491	0.000145	0.000000
31	0.775	0.203907	0.212390	0.212248	0.212248	0.008341	0.000142	0.000000
32	0.800	0.193711	0.202036	0.201897	0.201897	0.008185	0.000140	0.000000
33	0.825	0.184026	0.192187	0.192050	0.192050	0.008024	0.000137	0.000000
34	0.850	0.174825	0.182818	0.182684	0.182684	0.007859	0.000134	0.000000
35	0.875	0.166083	0.173906	0.173774	0.173774	0.007691	0.000132	0.000000
36	0.900	0.157779	0.165428	0.165299	0.165299	0.007520	0.000129	0.000000
37	0.925	0.149890	0.157363	0.157237	0.157237	0.007347	0.000126	0.000000
38	0.950	0.142396	0.149692	0.149569	0.149569	0.007173	0.000123	0.000000
39	0.975	0.135276	0.142394	0.142274	0.142274	0.006998	0.000120	0.000000
40	1.000	0.128512	0.135452	0.135335	0.135335	0.006823	0.000117	0.000000



گراف ۱- مقایسه نتایج جدول ۱

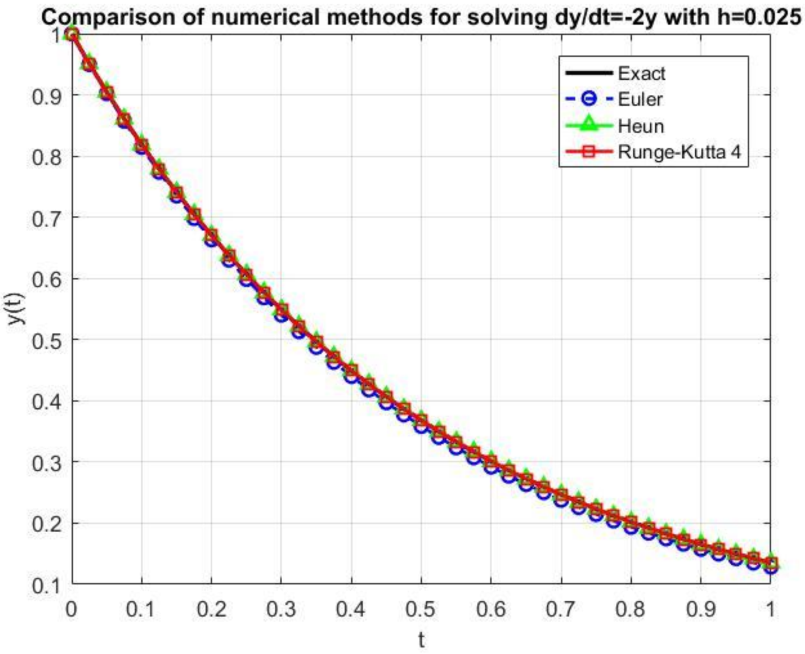
این گراف به‌خوبی نشان می‌دهد که با افزایش مرتبه روش‌های عددی، دقت تقریب به شکل محسوسی بهبود می‌یابد. بنابراین، برای مسائل حساس به دقت یا شبیه‌سازی‌های طولانی‌مدت، استفاده از روش‌های مرتبه بالاتر به‌ویژه رانگه-کوتا مرتبه۴ توصیه می‌شود، در حالی که روش اویلر تنها برای آموزش یا مسائل بسیار ساده مناسب است.



گراف ۲- مقایسه نتایج جدول ۲

- کاهش فاصله از $h=۰.۱$ به $h=۰.۰۵$ باعث شده خطای همه روش‌ها کاهش یابد.
- روش اویلر همچنان خطای بیشتری نسبت به دیگران دارد اما نسبت به قبل بهبود چشمگیری را نشان داده است.
- روش‌های بهبود یافته اویلر و رانگه-کوتاه مرتبه۴ هر دو عملکرد عالی دارند و برای این فاصله تقریبا یکسان با جواب دقیق هستند.

این گراف نشان می‌دهد که یکی از راه‌های اساسی برای افزایش دقت روش‌های عددی کاهش اندازه فاصله محاسباتی است. در حالی‌که روش اویلر همچنان خطای بیشتری دارد، روش‌های با مرتبه بالاتر (اویلر بهبود یافته و رانگه-کوتاه مرتبه۴) با فاصله کوچک تقریباً منطبق با جواب دقیق می‌شوند. بنابراین، انتخاب بین روش‌ها باید بر اساس تعادل میان هزینه محاسباتی و دقت مورد نیاز انجام گیرد.



گراف ۳- مقایسه نتایج جدول ۳

- با کاهش فاصله به $h = ۰.۰۲۵$، تمام روش‌ها به جواب دقیق نزدیک‌تر شده‌اند.
- خطای روش اویلر همچنان محسوس است اما نسبت به فاصله‌های بزرگ‌تر بسیار کمتر شده است.
- روش‌های اویلر بهبود یافته و رانگه-کوتا مرتبه۴ هر دو در این شرایط تقریباً منطبق بر جواب دقیق هستند، به‌طوری که تفاوتشان با چشم دیده نمی‌شود.

پس نتیجه می‌شود که کاهش اندازه فاصله باعث بهبود دقت در تمام روش‌ها می‌شود، اما در کاربردهای عملی باید بین قیمت محاسباتی و دقت مورد نیاز تعادل برقرار کرد:

- اگر سرعت محاسبه اهمیت دارد، روش اویلر بهبودیافته با فاصله کوچک انتخاب مناسبی است.
- اگر بیشترین دقت حتی در مسائل پیچیده مورد نظر باشد، روش رانگه-کوتا مرتبه۴ بهترین گزینه است.

جدول ۶- نتیجه نهایی و مقایسوی برای هر سه روش با سه فاصله زمانی

روش عددی	فاصله زمانی (h)	مقداری تقریبی y(1)	خطای عددی
اویلر	۰.۱	۰.۱۰۷۴	۰.۰۲۷۹

	۰.۰۵	۰.۱۲۱۶	۰.۱۳۷
	۰.۰۲۵	۰.۱۲۸۸	۰.۰۰۶۵
	۰.۱	۰.۱۳۲۰	۰.۰۰۳۳
هیون	۰.۰۵	۰.۱۳۴۵	۰.۰۰۰۸
	۰.۰۲۵	۰.۱۳۵۲	۰.۰۰۰۱
	۰.۱	۰.۱۳۵۳	۰.۰۰۰۰۱
رانگه-کوتا مرتبه۴	۰.۰۵	۰.۱۳۵۳	≈۰
	۰.۰۲۵	۰.۱۳۵۳	≈۰

۴. بحث و مناقشه

در این مقاله، سه روش عددی کلاسیک شامل **روش اویلر، روش اویلر بهبودیافته (هیون)** و **روش رانگه-کوتا مرتبه چهارم** برای حل معادلات دیفرانسیل معمولی مورد بررسی و مقایسه قرار گرفتند.

ابتدا فرمول‌بندی این روش‌ها معرفی و سپس با تحلیل‌های نظری، دقت و مرتبه خطای آن‌ها مشخص شد. بررسی‌ها نشان داد:

- روش اویلر دارای **مرتبه اول دقت** است و خطای عددی آن با کاهش فاصله زمانی به کندی کاهش می‌یابد.
- روش هیون با **مرتبه دوم دقت** نسبت به اویلر پیشرفته‌تر بوده و در بسیاری از مسائل کاربردی قابل قبول است.
- روش رونگه-کوتا مرتبه۴ دارای **مرتبه چهارم دقت** است و برای بسیاری از کاربردهای دقیق و حساس انتخاب مناسبی است، هرچند هزینه محاسباتی بیشتری دارد (جعفری، ۱۳۹۶؛ میرهادی، ۱۳۹۸؛ Lambert,1991; Shampin, 1994).

در تحلیل پایداری عددی، مشاهده شد که هر سه روش دارای **پایداری شرطی** هستند. این بدان معناست که روش‌ها تنها در صورتی پایدار خواهند بود که فاصله زمانی به اندازه کافی کوچک انتخاب شود. در مسائل کندزوال، روش‌های صریح مانند این سه روش ممکن است ناپایدار باشند (احمدی، ۱۳۹۷؛ Ascher & Petzold, 1998; Butcher, 2016).

شبیه‌سازی عددی و مقایسه با جواب تحلیلی در معادله، آزمایش $y'=-2y$ نشان داد که نتایج عددی کاملاً با تحلیل‌های نظری همخوانی دارند. به ویژه روش رانگه-کوتا مرتبه۴ حتی با فاصله زمانی نسبتاً بزرگ نیز دقت بسیار خوبی ارائه می‌دهد.

۵. نتیجه گیری

این تحقیق با بررسی آنالیز عددی و نظری روش‌های کلاسیک حل معادلات دیفرانسیل معمولی، شامل روش اویلر، هیون و رانگه-کوتا مرتبه چهارم، بر نقش کلیدی آنالیز خطای عددی، همگرایی و ثبات این الگوریتم‌ها تأکید کرد. نتایج شبیه سازی‌ها بر معادله آزمایشی با شرط اولیه نشان داد روش رانگه-کوتا مرتبه چهارم با خطای کلی مرتبه دقت بسیار بالاتر نسبت به روش اویلر و هیون دارد؛ به طوری‌که در فاصله‌های زمانی $h=0.1$ ، $h=0.05$ و $h=0.025$ خطای اویلر به ترتیب ۰.۰۲۷۹۶۱، ۰.۰۱۳۷۵۹ و ۰.۰۰۶۸۲۳ بود، در حالی‌که خطای رونگه-کوتا مرتبه چهارم صفر گزارش شد.

کاهش فاصله زمانی h (از ۰.۱ به ۰.۰۲۵) خطاها را در همه روش‌ها کم کرد، اما قیمت محاسباتی را افزایش داد و انتخاب بهینه h را ضروری ساخت. روش رانگه-کوتا مرتبه چهارم ناحیه ثبات وسیع‌تر در صفحه دارد و برای مسائل کاهش آهسته مناسب‌تر است. که برتری روش‌های مرتبه بالاتر را در کاربردهای انجینری و فزیک تائید می‌کند، هر چند تمرکز بر مسائل غیر سخت خطی، کاربرد را محدود کرده و پیشنهاد می‌شود برای مسائل با دقت متوسط و هزینه کم، از روش هیون و برای شبیه سازی‌های دقیق از روش رانگه-کوتاه مرتبه چهارم استفاده شود. محدودیت‌های این مطالعه شامل تمرکز بر مسائل خطی غیر سخت است؛ بنابراین، تحقیقات آینده روش‌های ضمنی مانند (BDF) یا مسائل سخت را با آنالیز خطای کم/کلی گسترده‌تر بررسی کند. همچنین، گسترش به سیستم‌های چند بعدی و مقایسه با روش‌های تطبیقیDormand-Prince ، افق‌های نوینی برای بهینه‌سازی عددی فراهم آورد .

در نهایت، این تحلیل نه تنها درک عمیق‌تری از تعادل دقت، ثبات، هزینه در روش‌های عددی دیفرانسیل معمولی فراهم می‌کند، بلکه ابزارهای کاربردی برای محصلان و محققان ریاضیات کاربردی عرضه می‌نماید.

منابع

۱. احمدی، ع. (۱۳۹۷). تحلیل خطای روش‌های عددی در معادلات دیفرانسیل.تهران: انتشارات دانشگاه تهران.

۲. جعفری، ر .(۱۳۹۷). پایداری و دقت روش‌های عددی چندمرحله‌ای .مجله ریاضی و کامپیوتر، ۵ (۳)، ۴۵-۶۰.

۳. حسینی، م .(۱۳۹۵). تحلیل پایداری روش‌های عددی حل معادلات دیفرانسیل معمولی. مجله علوم ریاضی و کاربردها، ۳ (۲)، ۱۲۳-۱۴۰.

٤. رامین‌فر، ح .و همکاران .(۱۳۹۶). روش‌های عددی معادلات دیفرانسیل. تهران: دانشگاه صنعتی شریف.

٥. فتحی، ا .(۱۳۹۳). مقدمه‌ای بر تحلیل عددی معادلات دیفرانسیل. تهران: انتشارات سمت.

٦. قربانی، م .و همکاران .(۱۳۹۹). تحلیل خطای روش‌های کلاسیک در حل معادلات دیفرانسیل .مجله پژوهش‌های ریاضی، ۱۰ (۲)، ۱۵۰-۱۷۵.

۷. گلشن، ح .(۱۳۹۵). بررسی پایداری روش اویلر ضمنی و صریح .مجله ریاضی کاربردی،۱۱، ۳۵-۵۲.

۸. موسوی، ر .(۱۳۹۴). بررسی دقت و پایداری روش رانگ-کوتا .مجله مهندسی برق و کامپیوتر، ۲(۴)، ۸۵-۹۷.

۹. میرهادی، س .(۱۳۹۸). مطالعه مقایسه‌ای روش‌های عددی کلاسیک برای معادلات دیفرانسیل .پژوهش‌های کاربردی ریاضی، ۱۵، ۷۰-۹۰.

۱۰. نادری، ف .(۱۳۹۸). روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل. اصفهان: انتشارات دانشگاه صنعتی اصفهان.

11. Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). Computer Methods for Ordinary Differential Equations and Differential-Algebraic Equations. SIAM.
12. Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2017). Elementary differential equations and boundary value problems (11th ed.). Wiley.
13. Burden, R. L., & Faires, J. D. (2011). Numerical analysis (9th ed.). Brooks/Cole.
14. Butcher, J. C. (1987). The Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations: Runge-Kutta and General Linear Methods. Wiley.
15. Butcher, J. C. (2008). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations (Reprint). Wiley.
16. Butcher, J. C. (2016). Numerical Methods for Ordinary Differential Equations (3rd ed.). Wiley.
17. Butcher, J. C., & O'Hara, S. (2014). The Stability of Runge-Kutta Methods. IMA Journal of Numerical Analysis, 34(4), 1652–1677.
18. Durran, D. R. (2010). Numerical Methods for Fluid Dynamics: With Applications to Geophysics. Springer.
19. Gear, C. W. (1971). Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. Prentice-Hall.
20. Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving Ordinary Differential Equations I: Nonstiff Problems (2nd ed.). Springer.
21. Hairer, E., & Wanner, G. (1991). The Numerical Solution of Differential-Algebraic Systems by Runge-Kutta Methods. Springer.
22. Hairer, E., & Wanner, G. (1996). Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems (2nd ed.). Springer.
23. Iserles, A. (2008). A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations (2nd ed.). Cambridge University Press.
24. Lambert, J. D. (1991). Numerical Methods for Ordinary Differential Systems: The Initial Value Problem. Wiley.
25. Lubich, C. (2008). From Quantum to Classical Molecular Dynamics: Reduced Models and Numerical Analysis. Zurich Lectures in Advanced Mathematics.
26. Ralston, A., & Rabinowitz, P. (2001). A First Course in Numerical Analysis. Dover Publications.
27. Sanz-Serna, J. M., & Calvo, M. P. (1994). Numerical Hamiltonian Problems. Chapman & Hall.
28. Shampine, L. F. (1994). Numerical Solution of Ordinary Differential Equations. Chapman & Hall.