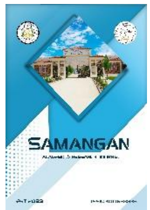
**Samangan Scientific and Research Journal**

[https://researchsparker.edu.af/index.php/SARJ](https://researchsparker.edu.af/index.php/SARJ)

DOI: 10.64226/sarj.v3i01.100

e-ISSN:3105-1715

ISSN: 3006-8835




# Comparison of analytical and approximate approaches to solving differential equations

**Abdulbasir Deljoy [1,*]**

[1]Department of Mathematics, Education Faculty, Samangan University, Samangan, Afghanistan

[*] *Corresponding Author: basir.deljuy@gmail.com*

Cite this study: Deljoy, A. (2025). Comparison of analytical and approximate approaches to solving differential equations. Samangan Scientific and Research Journal, 3(1), 129-145.

**Keywords**

Analytical method, Approximate method, Computational accuracy, Differential equations, Numerical solution, Optimization.

Research

Received:2025-09-25

Revised: 2025-10-13

Accepted:2025-10-22

Published:2025-12-30

**Abstract**

The solution of differential equations constitutes a fundamental problem in applied mathematics, playing a crucial role in modeling natural phenomena. Despite the high significance of analytical methods in providing exact solutions, many differential equations lack closed-form solutions. Therefore, the utilization of approximate methods as an effective and flexible alternative becomes essential. The research methodology is library-based, with information extracted from reputable scientific sources, including ScienceDirect, IEEE, Scopus, and Google Scholar. The software Publish or Perish was employed for the systematic collection and rigorous evaluation of scholarly references. This study adopts a mixed-methods approach (quantitative and qualitative), and the analysis is conducted through empirical comparisons among methods such as Taylor series, Euler, Runge–Kutta, and numerical modeling techniques. Findings indicate that analytical methods are effective and efficient in providing a precise theoretical framework and in explaining phenomena, yet they exhibit limited efficiency in solving complex problems. Conversely, approximate methods, despite their inherent errors, offer greater flexibility and computational speed, making them more suitable for practical applications. The most significant outcome of this investigation is that a judicious combination of analytical and approximate methods can enhance computational accuracy, improve stability, and reduce computational time in the numerical solution of differential equations. The present study is particularly important as it not only elucidates the capabilities and limitations of each approach but also provides a framework for optimal selection or integration of methods applicable in scientific and industrial contexts.

مجلهٔ علمی-تحقیقی سمنگان

https://researchsparker.edu.af/index.php/SARJ

DOI: 10.64226/sarj.v3i01.100

e-ISSN:3105-1715

ISSN: 3006-8835

# مقایسهٔ روش‌های تحلیلی و تقریبی برای حل معادلات دیفرانسیل

**پوهندوی عبدالبصیر دلجوی [1،*]**

[1] دیپارتمنت ریاضی، پوهنحی تعلیم و تربیه، پوهنتون سمنگان.

*** نویسنده مسؤول:** basir.deljuy@gmail.com

مرجع‌دهی: دلجوی، ع.(۱۴۰۴). مقایسهٔ روش‌های تحلیلی و تقریبی برای حل معادلات دیفرانسیل، ۳(۱)، ۱۲۹-۱۴۵.

**کلمات کلیدی**

بهینه‌سازی، حل عددی، دقت محاسباتی، روش تحلیلی، روش تقریبی، معادلات دیفرانسیل.

## چکیده

حل معادلات دیفرانسیل یکی از مسائل بنیادی در ریاضیات کاربردی است که نقش کلیدی در مودل‌سازی پدیده‌های طبیعی ایفا می‌کند. با وجود اهمیت بالای روش‌های تحلیلی در ارائه‌ی جواب‌های دقیق، بسیاری از معادلات دیفرانسیل، فاقد راه‌حل تحلیلی هستند. از این‌رو، بهره‌گیری از روش‌های تقریبی به‌عنوان جایگزینی مؤثر و انعطاف‌پذیر ضروری می‌باشد. میتودلوژی تحقیق بر پایه روش کتابخانه‌ای استوار بوده و اطلاعات از کُتب و منابع معتبر علمی نظیر Science Direct، IEEE، Scopus و Google Scholar استخراج گردیده و جهت جمع‌آوری و ارزیابی دقیق منابع علمی از نرم‌افزار Publish or Perish استفاده به عمل آمد. این تحقیق به‌صورت ترکیبی(کمی و کیفی) طراحی شده و تحلیل معلومات با استفاده از مقایسهٔ تجربی میان روش‌هایی چون سری تیلور، اویلر، رونگه-کوتای و تکنیک‌های مودل‌سازی عددی انجام گرفته است. یافته‌ها نشان می‌دهد که روش‌های تحلیلی در ارائه چارچوب نظری دقیق و در شرح و توضیح پدیده‌ها مؤثر و کارآمد هستند، اما در حل مسائل پیچیده کارایی محدودی دارند. در مقابل، روش‌های تقریبی با وجود ذات خطادار خود، انعطاف‌پذیری و سرعت بالاتری داشته و برای کاربردهای واقعی مؤثرترند. مهم‌ترین نتیجه این بررسی آن است که ترکیب مناسب روش‌های تحلیلی و تقریبی می‌تواند موجب افزایش دقت محاسباتی، بهبود پایداری و کاهش زمان در حل عددی معادلات دیفرانسیل گردد. اهمیت تحقیق حاضر در این است که علاوه بر روشن‌ساختن قابلیت‌ها و محدودیت‌های هر رویکرد، الگویی برای انتخاب یا ترکیب بهینهٔ روش‌ها ارائه می‌دهد که می‌تواند در کاربردهای علمی و صنعتی مورد استفاده قرار گیرد.

**مقدمه**

معادلات دیفرانسیل در بسیاری از مسائل کاربرد دارند. یک معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ n، در حالت کُلی به صورت زیر می‌باشد:

$$f(x,y,y',y'',....,y^{(n)})=0$$

و منظور از حل آن پیدا کردنِ تابع $y(x)$ است که در معادلهٔ فوق صدق کند(نیکوکار، 1388). در آموزش و تحلیل معادلات دیفرانسیل، بخش قابل توجهی از تلاش‌ها معطوف به بهره‌گیری از روش‌های تحلیلی برای یافتن پاسخ دقیق آن‌ها می‌باشد. این تلاش‌ها معمولاً با دسته‌بندی معادلات و تعیین مواردی که قابلیت حل تحلیلی دارند آغاز می‌شود. با این حال، بسیاری از معادلات دیفرانسیل، به‌ویژه معادلات غیرخطی یا با شرایط پیچیده، یا فاقد راه‌حل تحلیلی هستند یا پاسخ آن‌ها به‌قدری پیچیده است که استفاده عملی از آن دشوار می‌گردد. بنابراین، بهره‌گیری از روش‌های عددی و تقریبی در چنین مواردی اجتناب‌ناپذیر است(Iserles, 2018).

روش‌های مختلفی برای حل معادلات دیفرانسیل توسعه یافته‌اند که به‌طور کُلی می‌توان آن‌ها را در دو دسته‌ی اصلی که عبارت از؛ روش‌های تحلیلی و روش‌های تقریبی یا عددی است جای داد. روش‌های تحلیلی تلاش می‌کنند تا جواب دقیق معادله را با استفاده از تکنیک‌های ریاضی مانند روش تفکیک‌پذیری، روش تغییر متغیر، سری‌های توانی، تبدیل لاپلاس و ... به‌دست آورند(Kreyszig, 1993). با این حال، در بسیاری از موارد به‌ویژه در معادلات غیرخطی یا دارای شرایط مرزی پیچیده، یافتن حل تحلیلی ممکن نیست یا منجر به پاسخ‌هایی پیچیده و غیرکاربردی می‌شود(Ahmadi, 2012). در چنین شرایطی، روش‌های عددی جایگزینی مؤثر و انعطاف پذیر ارائه می‌دهند. این روش‌ها با بهره‌گیری از الگوریتم‌های گام‌به‌گام مانند روش سری تیلور، روش اویلر، روش‌های چندگامی، روش Runge-Kutta و روش تفاضل محدود، جواب‌های تقریبی را ارائه می‌دهند که با افزایش دقت گسسته‌سازی، می‌توانند به حل دقیق بسیار نزدیک شوند(Burden & Faires, 2010). هرچند این روش‌ها ذاتاً تقریبی هستند، اما در عمل بسیاری از آن‌ها برای حل مسائل واقعی بسیار کاربردی و قابل اطمینان‌اند(منصور، ۱۳۹۴). با توجه به رشد فزاینده کاربرد معادلات دیفرانسیل در مسائل پیچیده صنعتی و اقتصادی، در دهه‌های اخیر توجه بسیاری از محققان به سمت ترکیب روش‌های تحلیلی و عددی برای دستیابی به راه‌حل‌هایی دقیق‌تر، پایدارتر و کارآمدتر جلب شده است(Abbasi & Soleimani, 2018). در این رویکرد، بخش‌هایی که به‌صورت تحلیلی قابل حل هستند جدا می‌شوند و برای قسمت‌های غیرقابل حل یا پیچیده‌تر از روش‌های عددی استفاده می‌شود؛ یا حتی از روش‌های هوشمند مانند الگوریتم‌های ژنتیک، شبکه‌های عصبی مصنوعی برای افزایش دقت و کارایی استفاده می‌شود(Hosseinzadeh & Mohammadi, 2023).

یکی دیگر از چالش‌های مهم در این زمینه، ارزیابی دقت، پایداری، هزینه زمانی و پیچیدگی محاسباتی روش‌های مختلف حل معادلات است. در عمل، انتخاب روش مناسب برای حل یک معادله‌ی خاص به عواملی چون نوع معادله(خطی یا غیرخطی)، مرتبه، شرایط اولیه و مرزی و نیاز به دقت بالا یا سرعت اجرا بستگی دارد. در بسیاری از موارد مشاهده شده است که ترکیب چند روش و یا انتخاب استراتیژی یک روش خاص می‌تواند

به بهبود کارایی و کاهش خطا در حل منجر شود(Behrami, 2015). مطالعه حاضر، با بهره‌گیری از مرور منابع معتبر علمی به روش کتابخانه‌ای، صورت گرفته است. روش تحقیق، ترکیبی از تحلیل کیفی و کمی بوده که در آن روش‌های تحلیلی کلاسیک در کنار روش‌های عددی نوین بر اساس معیارهای مشخصی چون دقت، پایداری، هزینه زمانی و پیچیدگی محاسباتی ارزیابی شده‌اند.

تحقیق انجام‌شده نه‌تنها به درک بهتر قابلیت‌ها و محدودیت‌های هر یک از روش‌های تحلیلی و عددی می‌انجامد، بلکه راهکارهایی برای ترکیب بهینه آن‌ها نیز پیشنهاد می‌دهد. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که در بسیاری از موارد، رویکرد ترکیبی می‌تواند منجر به بهبود چشمگیر در عملکرد حل عددی معادلات دیفرانسیل شود. چنین یافته‌هایی برای محقِقان که در بخش‌های مختلف با مودل‌سازی ریاضی سروکار دارند، بسیار ارزشمند است و می‌تواند راهنمایی مؤثر در انتخاب و توسعه‌ی روش‌های حل مناسب فراهم آورد. هم‌چنین می‌توان این تحقیق را زمینه‌ساز تحقیقات آینده در جهت توسعه‌ی الگوریتم‌های هوشمند و ترکیبی جدید دانست که بتوانند پاسخ‌گویی بهتر و سریع‌تری به مسائل پیچیده ریاضی ارائه دهند.

**مواد و روش تحقیق**

با توجه به اهداف تحقیق و اهمیت موضوع، روش گردآوری داده‌ها و مطالب مُفید، مبتنی بر رویکرد کتابخانه‌ای بوده است. اطلاعات و منابع علمی معتبر از پایگاه‌های علمی نظیر Science Direct، IEEE Xplore، Scopus و Google Scholar استخراج گردیده و جهت افزایش دقت و جامعیت تحلیل‌ها، از نرم‌افزار Publish or Perish برای بازیابی و ارزیابی مقالات استفاده شده است. کُلیه کتاب‌ها و مقالات مرتبط با موضوع به‌صورت دقیق مورد بررسی و تحلیل قرار گرفتند و مطالب استخراج‌شده پس از طبقه‌بندی علمی، در چارچوب مفهومی تحقیق ارائه گردیدند. علاوه بر آن، جهت تقویت یافته‌ها، از روش تحقیق ترکیبی(کمی و کیفی) استفاده شده است. بدین‌گونه که در کنار تحلیل محتوای نظری، برخی داده‌ها و نتایج به‌صورت نظام‌مند کُدگذاری و تحلیل شدند. بنابراین، روش‌شناسی این تحقیق تلفیقی از تحلیل محتوای کیفی و ارزیابی کمی منابع معتبر است که در قالب مرور نظام‌مند مطالعات پیشین بناء نهاده شده است.

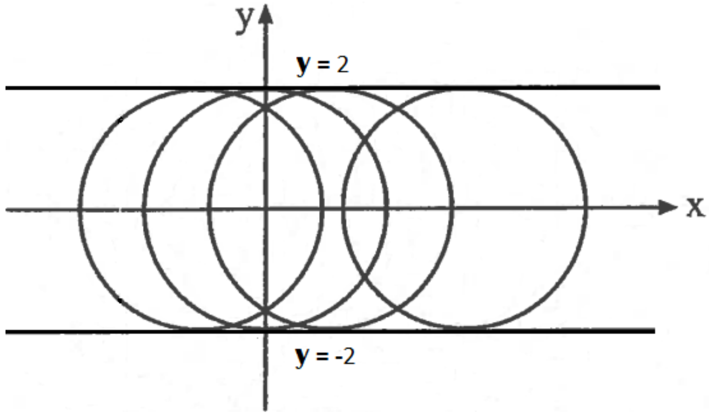
**نتایج و بحث**

معادله‌ای را که شامل رابطه بین یک متحول، یک تابع مجهول و یک یا چند مشتق آن باشد معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامند. یک معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ n در حالت کُلی به صورت زیر می‌باشد:

$$y^{(n)} = f\left(x\ ,\ y\ ,\ y'\ ,\ y'',\ ....,\ y^{(n-1)}\right) = 0 \quad ...... \quad (1)$$

و منظور از جواب معادلهٔ (۱) دریافت تابعی به صورت $y(x)$ است که به طور پیوسته در یک انتروال معلوم، n بار مشتق‌پذیر باشد و در معادلهٔ (۱) صدق کند. اگر معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ n باشد، جواب عمومی آن شامل n پارامتر یا ثابت دلخواه خواهد بود. هر معادلهٔ دیفرانسیل که به صورت تحلیلی حل گردد؛ دارای سه نوع جواب بوده که عبارت از جواب عمومی، جواب خصوصی و جواب غیر عادی می‌باشد. جواب عمومی بعد از حل معادله

به دست می‌آید که نظر به مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل شامل تعداد پارامترها است. جواب خصوصی معادلهٔ دیفرانسیل جوابی است بدون پارامتر و همیشه از جواب عمومی به دست می‌آید. جواب غیر عادی معادلهٔ دیفرانسیل، جوابی است که منحنی نمایش آن بر تمام منحنی‌های جواب عمومی مماس باشد(غلام‌حسین،1396). مثلاً در معادلهٔ دیفرانسیل $y^2(1+y'^2)=4$ ، جواب عمومی معادله عبارت از $(x-c)^2+y^2=4$، جواب خصوصی معادله عبارت از $(x-2)^2+y^2=4$ و جواب غیر عادی معادله عبارت از $y=\pm 2$ می‌باشد.




شکل۱: نمایش دسته منحنی توسط جواب غیر عادی(نیکو کار، 1388).

معادلات دیفرانسیل در بسیاری از مسائل انجنیری و علوم کاربرد دارد و حل معادلات دیفرانسیل به‌طور کُلی به دو روش تحلیلی و عددی یا تقریبی صورت می‌گیرد. که در ذیل هر یکی از این روش‌ها توضیح می‌شود.

## ۱. حل معادلات دیفرانسیل به روش‌های تحلیلی

روش‌های تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل، شامل تکنیک‌هایی هستند که به کمک آن‌ها می‌توان معادلات دیفرانسیل را به‌طور دقیق و با فورمول‌های ریاضی حل کرد. در این روش‌ها، هدف یافتن یک راه‌حل دقیق برای معادله دیفرانسیل است. بهینه‌سازی در این روش‌ها معمولاً به معنای استفاده از تکنیک‌های ریاضیاتی و استفاده از ویژگی‌های خاص معادله است. این روش‌ها معمولاً به‌دنبال یافتن راه‌حل‌هایی دقیق و عمومی برای معادلات دیفرانسیل هستند و بر پایه قواعد مختلف ریاضیکی از جمله روابط الجبری، مثلثاتی و هندسی استوار هستند. در ذیل به بعضی از مهم‌ترین روش‌های تحلیلی و ویژگی‌های آن‌ها پرداخته می‌شود.

**۱-۱. معادلات دیفرانسیل تفکیک‌پذیر:** معادلات دیفرانسیل با یک متحول مستقل و یک متحول وابسته که قابل جداسازی باشند معادلات تفکیک‌پذیر گفته می‌شود. با تفکیک متحول‌ها و انجام یکپارچه‌سازی، می‌توان به راحتی به حل معادله رسید. مثلاً اگر داشته باشیم $f(x,y)=f_1(x)f_2(y)$ که در آن $f_1$ تابعی تنها از $x$ و $f_2$ تابعی تنها از $y$ باشد، در این صورت داریم که(نیکو کار، ۱۳۸۸):

$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)\ /\cdot\frac{dx}{f_2(y)} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx\ /\cdot\int \quad ...... \quad (2)$$

**۱-۲. معادلات دیفرانسیل خطی:** اگر یک معادلهٔ دیفرانسیل $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ را بتوان به صورت و یا $\frac{dy}{dx}+y\,f(x)=q(x)$ نوشت، آن را خطی گوییم. اگر $q(x)=0$ باشد، معادله متجانس و در غیر این‌صورت نا متجانس می‌باشد. جواب عمومی معادلهٔ فوق طور ذیل بدست می‌آید.

**اول:** اگر معادلهٔ دیفرانسیل خطی متجانس باشد، آنگاه:

$$\frac{dy}{dx}+y\,f(x)=0 \qquad \ln y=-\int f(x)dx+C_1$$
$$\frac{dy}{y}=-f(x)dx \;/\int\rightarrow \qquad \Rightarrow\; y=c\,e^{-\int f(x)dx}$$

**دوم:** اگر معادلهٔ دیفرانسیل خطی نامتجانس باشد، آنگاه:

$$\left(y\,f(x)-q(x)\right)dx+dy=0 \qquad ........... \qquad (*)$$

معادلهٔ $(*)$ در حالت کُلی از نوع متغیرهای از هم جدا و متجانس نیست، لذا شرط کامل بودن را بررسی می-کنیم:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=f(x) \qquad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=0$$

و چون معادلهٔ $(*)$ کامل نیست بناءً آن را با فکتور انتیگرال که تابعی تنها از $x$ به صورت $F=e^{\int f(x)dx}$ می‌باشد ضرب می‌کنیم(خلیلی، 1391).

$$e^{\int f(x)dx}\left[\frac{dy}{dx}+y\,f(x)\right]=q(x)e^{\int f(x)dx}$$

و چون

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int f(x)dx}\right)=\frac{dy}{dx}e^{\int f(x)dx}+y\,f(x)e^{\int f(x)dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{\int f(x)dx}\right)=q(x)e^{\int f(x)dx} \qquad ........... \qquad (i)$$

از طرفین رابطهٔ $(i)$ نسبت به $(x)$ انتیگرال می‌گیریم و داریم که:

$$y\,e^{\int f(x)dx}=\int q(x)e^{\int f(x)dx}+c$$

$$y=e^{-\int f(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int f(x)dx}+c\right]$$

با فرض $g(x)=\int f(x)dx$ جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسـیل خطی $\frac{dy}{dx}+y\,f(x)=q(x)$ توسـط فورمول ذیل به دست می‌آید.

$$y=e^{-g(x)}\left[\int q(x)e^{-g(x)}+c\right]$$

**۱-۳. معادلات دیفرانسیل غیرخطی:** معادلهٔ دیفرانسیل غیر خطی معادله‌ای است که در آن توان متحول‌ها متفاوت از یک باشد یا ضریب متحول ثابت نباشد. معادلات دیفرانسیل غیرخطی معمولاً حل دقیق ندارند و نمی‌توانند به سادگی جدا سازی یا خطی شوند، ممکن است به کمک تبدیلات مناسب به معادلهٔ خطی یا استفاده از تغییر متحول‌ها، روش‌های تقریبی و یا تبدیل‌های خاص ریاضی برای تقریب به حل‌های احتمالی معادله پرداخته شود. مثلاً معادلهٔ $y_1''+\lambda(1-y_1^2)y_1' + y_1 = 0$ یک معادلهٔ غیر خطی درجه دو می‌باشد. برای حل این معادله، از تبدیلات ریاضی استفاده کرده معادلهٔ درجه دو را به ۲ معادلهٔ درجه اول طور ذیل تبدیل نموده و بعداً حل کرده می‌توانیم.

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = \lambda(1-y_1^2)y_2 - y_1 \end{cases}$$

**۱-۴. حل معادلات دیفرانسیل به روش تبدیل لاپلاس**: این روش به طور گسترده برای حل معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه استفاده می‌شوند. به خصوص در مسائل فزیکی که تغییرات زمانی یا مکانی را مودل می‌کنند، این تبدیل‌ها امکان تحلیل معادله در بخش‌های مختلف را فراهم می‌آورند. برای حل معادلهٔ دیفرانسیل با این روش، سه مرحلهٔ زیر را باید اعمال کنیم(نیکوکار، 1388):

**مرحلهٔ اول:** معادلهٔ دیفرانسیل را با استفاده از تبدیل لاپلاس، به یک معادلهٔ الجبری تبدیل می‌کنیم؛

**مرحلهٔ دوم:** جواب معادلهٔ الجبری را به دست می‌آوریم؛

**مرحلهٔ سوم:** با استفاده از تبدیل معکوس از جواب مرحلهٔ دوم، جواب معادلهٔ اصلی را پیدا می‌کنیم.

تبدیل لاپلاس $f(t)$ برابر با تابعی $f(s)$ از متحول جدید S است که با استفاده از فورمول زیر به دست می‌آید.

$$L\left[f(t)\right] = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st}dt \quad ...... \quad (3)$$

**ویژگی‌های کُلی روش‌های تحلیلی**

۱. دقت بالا: این روش‌ها به‌طور معمول جواب‌های دقیقی تولید می‌کنند و می‌توانند نتایج دقیقی را در زمینه مسائل علمی ارائه دهند.

۲. نیاز به دانش ریاضی: بسیاری از این روش‌ها نیاز به دانش عمیق ریاضی دارند و ممکن است برای حل برخی معادلات به دانش تخصصی و تکنیک‌های پیچیدهٔ ریاضی نیاز داشته باشند.

۳. محدودیت در کاربرد: برخی از این روش‌ها فقط برای معادلات خاص( مانند معادلات خطی یا ساده) قابل استفاده هستند و برای معادلات پیچیده‌تر باید از روش‌های عددی یا تقریبی استفاده کرد.

٤. کاربرد در مسائل واقعی: روش‌های تحلیلی می‌توانند به عنوان ابزار مهمی برای پیش‌بینی رفتار سیستم‌ها و مودل‌سازی دقیق جریان‌ها و پدیده‌های طبیعی به کار روند( Boyce & DiPrima, 2001).

به طور کُلی، روش‌های تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل ابزارهای قدرتمندی هستند که به‌طور دقیق می‌توانند به حل مُشکلات پیچیدهٔ ریاضی کمک کنند، اما گاهی نیاز به روش‌های تقریبی یا عددی دارند تا در شرایط خاص به جواب‌های قابل قبول برسند.

## ۲. حل معادلات دیفرانسیل به روش‌های عددی

حل عددی معادلات دیفرانسیل در مواردی که حل معادلات به طریق تحلیلی به سادگی امکان‌پذیر نباشد، صورت می‌گیرد.

**دلایل نیاز به روش‌های تقریبی**

١. عدم وجود حل تحلیلی: برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل، به‌ویژه در مسائل غیرخطی، حل تحلیلی ممکن نیست یا بسیار پیچیده است.
٢. صرفه‌جویی در زمان: روش‌های تقریبی می‌توانند به‌سرعت جواب‌های تقریبی مناسبی ارائه دهند، به‌ویژه زمانی که نیاز به بررسی رفتار سیستم‌ها در مدت زمان کوتاه‌تری داریم.
٣. مودل‌سازی پیچیده: بسیاری از مسائل انجنیری و فِزیکی، مانند جریان سیالات یا انتقال حرارت به معادلات دیفرانسیل پیچیده منتج می‌شوند که نمی‌توان آن‌ها را به‌طور ساده حل کرد.
٤. دقت قابل تنظیم: در روش‌های عددی می‌توان با انتخاب گام زمانی یا روش خاص، دقت تخمین را کنترول کرد تا جواب‌هایی با دقت مناسب به‌دست آید(Burden & Faires, 2010).

در نهایت، روش‌های تقریبی به‌ویژه در کاربردهای عملی جایی پیدا می‌کنند که پیچیدگی سیستم‌ها مانع از حل دقیق آن‌ها شود و نیاز به سرعت و دقت در حل معادلات دیفرانسیل احساس می‌شود. در ذیل به برخی از روش‌های تقریبی حل معادلات دیفرانسیل اشاره می‌کنیم:

### ۲-۱. حل عددی معادلات دیفرانسیل به روش بسط تیلور

یکی از روش‌های حل عددی معادلات دیفرانسیل، استفاده از سلسلهٔ تیلور است. معادلهٔ دیفرانسیل

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \qquad (1)$$

را در نظر بگیرید که معادلهٔ از مرتبه اول است و در آن تابع $f$ ممکن است نسبت به $y$ خطی یا غیر خطی باشد. هرگاه $x_1 = x_0 + h$ باشد که در آن h نمو یا رشد اندکی متحول را نشان می‌دهد، در این صورت بسط

تیلور تابع $y$ را حول $x_0$ می‌نویسیم. بنابراین داریم که(Butcher, 2016):

$$y(x_1) = y(x_0+h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{1}{2!}h^2 y''(x_0) + .... \qquad (2)$$

چون $y(x_1)$ مجهول است، مشتقات آن نیز موجود نخواهند بود ولی با استفاده از رابطه (۱) و به شرط وجود مشتقات $f$ نسبت به $x$ و $y$ تا هر مرتبهٔ دلخواه می‌توان $y', y''$ و . . . . را به دست آورد. هرگاه $y' = f(x,y) = f$ باشد، در این صورت:

$$y'' = f_x + f_y y' = f_x + f_y f$$
$$y''' = f_{xx} + 2f_{xy} f + f_{yy} f^2 + f_y f_x + f_y^2 f$$

همان‌طور که روابط فوق نشان می‌دهند حتی اگر تابع $f$ تابعی ساده باشد، مشتقات مرتبهٔ بالاتر $y$ می‌توانند پیچیده باشند. لذا امکان استفاده از جملات با مرتبهٔ بالا در سلسلهٔ تیلور نیست. بنابراین بایستی سلسلهٔ (۲) را محدود کنیم در این‌صورت جواب معادلهٔ دیفرانسیل در یک نقطهٔ از انتروال $[a\ ,\ b]$ با مقدار واقعی جواب، اختلاف خیلی زیاد پیدا می‌کند. هرگاه سلسلهٔ (۲) را تا مشتق مرتبهٔ k ام بنویسیم در این صورت داریم که:

$$y(x_1) = y(x_0 + h) \approx y(x_0) + hy'(x_0) + .... + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_0) = y_1 \qquad (3)$$

برای تعیین جواب معادلهٔ (۱) در نقطهٔ $x_2 = x_1 + h$ مراحل بالا را تکرار می‌کنیم. بنابراین خواهیم داشت:

$$y(x_2) = y(x_1 + h) \approx y(x_1) + hy'(x_1) + .... + \frac{h^k}{k!} y^{(k)}(x_1) = y_2 \qquad (4)$$

با تکرار روش فوق $y(x_n)$ را در تمام نقاط $x_i = x_0 + ih$ برای $i = 1,2,3,...$ تعیین کرده می‌توانیم.

**الگوریتم روش تیلور از مرتبهٔ K**

برای پیدا کردن جواب تقریبی معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول $y' = f(x, y)$ با شرایط $y(x_0) = y_0$ در انتروال $[a\ ,\ b]$ به ترتیب زیر عمل می‌کنیم(بابلیان، 1387):

۱. انتروال $[a\ ,\ b]$ را به N قسمت مساوی به طول $h = \frac{b-a}{N}$ تقسیم کرده و قرار می‌دهیم:

$$x_0 = a\ ,\ \ x_N = b\ \ ,\ \ y(x_n) = y(a + nh)\ ,\ x_n = a + nh$$

۲. با داشتن $y_n$ مقدار تقریبی $y(x_{n+1})$ یعنی $y_{n+1}$ را از فورمول زیر به دست می‌آوریم:

$$\boxed{\begin{array}{l} y_{n+1} = y_n + h\, f(x_n, y_n) + \frac{h^2}{2!} f'(x_n, y_n) + .... + \frac{h^k}{k!} f^{(k-1)}(x_n, y_n) \\ \qquad n = 0,1,2,...., N-1 \end{array}} \quad ...... \quad (5)$$

**مثال:** معادلهٔ دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید، با استفاده از روش تیلور مرتبهٔ چهار ، مقدار تقریبی $y(0.5)$ را در صورتی‌که $h = 0.1$ باشد دریابید.

**حل:** چون $y_0 = 1,\ x_0 = 0$ و $f(x, y) = x + y$ است بنابراین داریم که:

$$\begin{aligned} y' &= f(x,y) = x+y \\ y'' &= f'(x,y) = 1+y' = 1+x+y \\ y''' &= f''(x,y) = y'' = 1+x+y \\ y^{(4)} &= f'''(x,y) = y''' = 1+x+y \end{aligned}$$

بنابر این با استفاده از فورمول فوق و اختیار نمودن $k=4$ و $h=0.1$ خواهیم داشت:

$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n+y_n) + \frac{(0.1)^2}{2!}(1+x_n+y_n) + \frac{(0.1)^3}{3!}(1+x_n+y_n)$$
$$+\frac{(0.1)^4}{4!}(1+x_n+y_n) \approx 0.00517 + 0.10517x_n + 1.10517y_n$$

لذا

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.00517+0.10517(0)+1.10517(1) = 1.11034 \\ y_2 &= 0.00517+0.10517(0.1)+1.10517(1.11034) = 1.24280 \\ y_3 &= 0.00517+0.10517(0.2)+1.10517(1.24280) = 1.39971 \\ y_4 &= 0.00517+0.10517(0.3)+1.10517(1.39971) = 1.58364 \\ y_5 &= 0.00517+0.10517(0.4)+1.10517(1.58364) = 1.79743 \\ &\Rightarrow \quad y(0.5) \approx y_5 = 1.79743 \end{aligned}$$

بعد از مقایسهٔ جواب تقریبی فوق با جواب واقعی معادلهٔ دیفرانسیل در ذیل، خطای $y_5$ حدود $0.00001$ است.

$$\begin{aligned} y &= 2e^x - x - 1 \\ y(0.5) &= y_5 = 1.79744 \end{aligned}$$

عیب روش تیلور آن است که اگر $k>1$ باشد، در حالت کُلی، محاسبهٔ مشتقات مراتب بالاتر از دو تابع بسیار مشکل می‌شود. بنابراین، به دنبال روش‌های دیگر می‌رویم که از مشتقات تابع $y'$ استفاده نمی‌کنند ولی دقتی معادل با روش تیلور دارند(بهرامی، ۱۳۹۴).

### ۲-۲. حل عددی معادلات دیفرانسیل به روش اویلر

یک راه اجتناب از محاسبهٔ مشتقات مراتب بالاتر $y$ آن است که هرگاه در الگوریتم تیلور $k=1$ قرار دهیم، تقریب (6) را نتیجه می‌دهد:

$$\boxed{y_{n+1} = y_n + h\,f(x_n+y_n)} \qquad \ldots\ldots \qquad (6)$$

این روش محاسبه به روش اویلر موسوم است.

**مثال:** معادلهٔ دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x+y \\ y(0)=1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید، با استفاده از روش اویلر مقدار تقریبی $y(0.5)$ را در صورتی‌که $h=0.1$ باشد دریابید.

**حل:** چون $x_0=0$ ,$y_0=1$ ، $h=0.1$ و $f(x,y)=x+y$ است بنابراین داریم که:

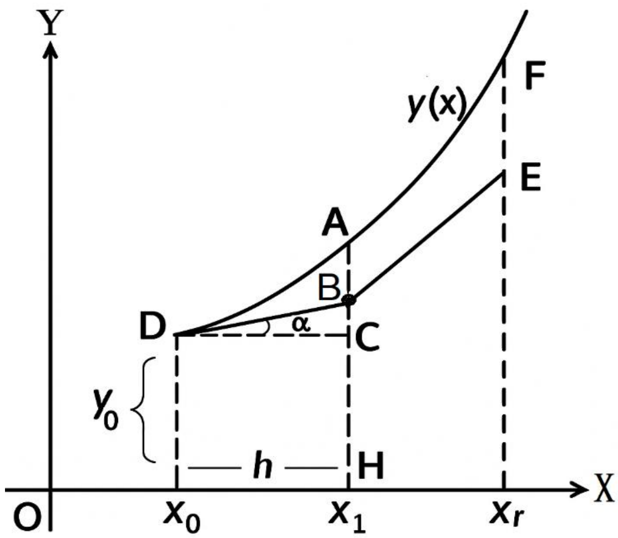
$$y_{n+1} = y_n + 0.1(x_n+y_n) = 0.1x_n + 1.1y_n$$

$$y_1 = 0.1x_0 + 1.1y_0 = 0.1(0) + 1.1(1) = 1.1$$
$$y_2 = 0.1x_1 + 1.1y_1 = 0.1(0.1) + 1.1(1.1) = 1.22$$
$$y_3 = 0.1x_2 + 1.1y_2 = 0.1(0.2) + 1.1(1.22) = 1.362$$
$$y_4 = 0.1x_3 + 1.1y_3 = 0.1(0.3) + 1.1(1.362) = 1.5282$$
$$y_5 = 0.1x_4 + 1.1y_4 = 0.1(0.4) + 1.1(1.5282) = 1.72102$$

$$\Rightarrow \quad y(0.5) \approx y_5 = 1.72102$$

ملاحظه می‌شود که خطای $y_5$ حدود 0.08 است.

در حالت کُلی برای این که از روش اویلر جواب نسبتاً دقیق به دست آید، h باید بسیار کوچک باشد، ولی تحلیل زیر نشان می‌دهد که حتی اگر h بسیار کوچک هم باشد باز $y_n$ می‌تواند بسیار دور از $y(x_n)$ باشد.




شکل۲. نحوهٔ به دست آمدن $y_1$ از $y_0$ را نشان می‌دهد(بابلیان، 1387).

در شکل فوق خط AH بر محورOX عمود و خط DB مماس بر منحنی $y(x)$ است. در نتیجه؛

$$\tan\alpha = \frac{BC}{h} \quad \Rightarrow \quad BC = h \cdot \tan\alpha$$

اما، $\tan\alpha$ همان $y'$ در نقطهٔ $x_o$ است. یعنی، $\tan\alpha = y' = f(x_0, y_0)$. پس،

$$BC = h \cdot f(x_0, y_0)$$

بنابراین داریم که:

$$BH = CH + BC = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = y_1$$
$$\Rightarrow BH = y_1$$

به عبارت دیگر، نقطهٔ که روش اویلر مشخص می‌کند به جای A، نقطهٔ B است.

### ۲-۳. حل عددی معادلات دیفرانسیل به روش رونگه-کوتای

برای به دست آوردن جواب‌های دقیق‌تر برای معادلهٔ $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$، می‌توان از یک دستهٔ فورمول که توسط ریاضی‌دانان آلمانی به نام‌های رونگه و کوتای به دست آمده‌اند استفاده کرد. فورمول‌های رونگه- کوتای ظاهراً مفصل و پیچیده به نظر می‌رسند ولی در عمل به سادگی، به کمک یک وسیلهٔ محاسباتی قابل استفاده هستند و خطای کمی نسبت به روش‌های دیگر دارند و خطای آن در مجموع $O(h^5)$ است.

روش تیلور مرتبهٔ k در عمل برای مراتب بالا قابل استفاده نیست زیرا به مشتقات مرتبهٔ بالا نیاز دارد. حالت خاص $k=1$ یعنی روش اویلر نیز چندان مُفید نیست، مگر اینکه h را خیلی کوچک در نظر بگیریم. لذا برای حل معادله دیفرانسیل از روش‌های دیگر استفاده می‌شود که در آن نیازی به محاسبه مشتق‌های مرتبهٔ بالاتر f نیست، در عین حال از دقتی در حد دقت روش تیلور و مرتبه بالا برخوردار است.

**الگوریتم روش رونگه- کوتای مرتبهٔ دو :** برای مقدار ثابت h و $x_n = x_0 + nh$ قرار می‌دهیم:

$$\boxed{\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f(x_n + h\,,\ y_n + k_1) \end{cases}} \qquad ........... \quad (7)$$

عملیات فوق را برای $n = 0,1,2,...$ تکرار کنید. و خطای آن در مجموع $O(h^3)$ است.

**الگوریتم روش رونگه- کوتای مرتبهٔ چهار:** برای مقدار ثابت h و $x_n = x_0 + nh$ قرار می‌دهیم:

$$\boxed{\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = h\,f(x_n, y_n) \\ k_2 = h\,f(x_n + \frac{1}{2}h\,,\ y_n + \frac{1}{2}k_1) \\ k_3 = h\,f(x_n + \frac{1}{2}h\,,\ y_n + \frac{1}{2}k_2) \\ k_4 = h\,f(x_n + h\,,\ y_n + k_3) \end{cases}} \qquad .......... \quad (8)$$

فورمول فوق ظاهراً پیچیده به نظر می‌رسد ولی در عمل به سادگی، به کمک وسیلهٔ محاسبات قابل استفاده هستند و خطای کمی نسبت به روش‌های قبلی دارد. و خطای آن در مجموع $O(h^5)$ است(نیکو کار، 1392).

**مثال:** معادلهٔ دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید، با استفاده از روش رونگه-کوتای مرتبهٔ چهار، مقدار تقریبی $y(0.1)$ را در صورتی‌که $h = 0.1$ باشد دریابید.

**حل:** با توجه به الگوریتم (۲) و $n=0$ خواهیم داشت:

$$k_1 = 0.1(0+1) = 0.1$$
$$k_2 = 0.1(0.05+1.05) = 0.11$$
$$k_3 = 0.1(0.05+1.055) = 0.11050$$
$$k_4 = 0.1(0.1+1.11050) = 0.12105$$
$$y(0.1) \approx y_1 = 1 + \frac{1}{6}(0.1 + 2\times 0.11 + 2\times 0.1105 + 0.12105)$$

$$\Rightarrow \quad y(0.1) \approx y_1 = 1.11034$$

این مقدار با مقدار واقعی تابع یعنی $\begin{cases} y = 2e^x - x - 1 \\ y(0.1) = 2e^{(0.1)} - (0.1) - 1 \end{cases}$ تا پنج رقم اعشار کاملاً سازگاری دارد.

جدول۱ مقایسه بین خطای روش‌های ذکر شده و تعداد دفعاتی که تابع $y' = f(x,y)$ باید حساب شود را نشان می‌دهد(بابلیان، 1387).

| نام روش | اندازهٔ h | نتیجه | خطا | تعداد دفعاتی که f حساب شده است |
|---|---|---|---|---|
| تیلور | 0.02 | 1.1081 | 0.0022 | 5 |
| اویلر | 0.02 | 1.1104 | 0.0001 | 12 |
| رونگه- کوتای | 0.1 | 1.11034 | 0.0000 | 4 |

همان‌گونه که در جدول۱ مشاهده می‌شود، روش مرتبهٔ چهار رونگه-کوتای بر روش‌های تیلور و اویلر دقت بالاتری ارائه می‌دهد، هم خطای این روش از بقیه کمتر است و هم دفعاتی که تابع f حساب می‌شود.

### ۲-۴. حل معادلات دیفرانسیل به روش‌های آدامز

بهینه‌سازی حل معادلات دیفرانسیل به روش‌های چندگامی، به ویژه روش‌های آدامز(Adams methods) یک تکنیک مهم در حل عددی معادلات دیفرانسیل است.در روش‌هایی که تا کنون بررسی کرده‌ایم $y_{n+1}$ بر حسب $y_n$ به دست می‌آمد. به همین خاطر این روش‌ها برای مسائلی از نوع $y' = f(x,y)$ ایده‌آل هستند. اصولاً در یک روش چندگامی با استفاده از مقادیر قبلی $y$ و یا $y'$ که با دور اندیشی ذخیره کرده باشیم، یک پولینوم تشکیل می‌دهیم که تابع مشتق را تقریب کند و آن را برای انتروال بعدی بیرون‌یابی می‌کنیم. تعداد نقاط قبلی که مورد استفاده قرار می‌گیرند درجهٔ پولینوم و در نتیجه مرتبهٔ دقت فورمول حاصل را مشخص می‌کند. یعنی

$$y' = f(x,y) \;\rightarrow\; dy = f(x,y)dx \;\; / \int$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} dy = y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

$$\therefore \quad y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx$$

برای به دست آوردنِ مقدار انتیگرال سمت راست، تابع $f(x,y)$ را با یک پولینوم از $x$ که مقدار آن در چندین نقطهٔ قبلی با مقدار $f(x,y)$ یکسان باشد، تقریب می‌زنیم. اگر سه نقطهٔ قبلی را به کار ببریم، این پولینوم از درجهٔ دوم و اگر چهار نقطهٔ قبلی را به کار ببریم پولینوم از درجهٔ سوم خواهد بود(بابلیان، 1387).

فورمول زیر، فورمول مرتبهٔ سوم آدامز بوده و برای برآورد $y(x_{n+1})$ بکار می‌رود. و خطای آن در مجموع $O(h^4)$ است.

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\right)$$

**مثال:** معادلهٔ دیفرانسیل $\begin{cases} y' = x + y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ را در نظر بگیرید، با استفاده از روش آدامز، مقدار تقریبی $y(0.6)$ را در صورتی‌که $h = 0.2$ باشد دریابید.

**حل:** برآوردهایی از $y(0.2)$ و $y(0.4)$ قبلاً به یکی از روش‌های تک گامی حساب شده‌اند، از این‌رو با توجه به جدول ذیل و فورمول آدامز خواهیم داشت:

جدول۲ : برآوردهای مقدار تقریبی معادلهٔ دیفرانسیل به روش آدامز(حسینی، 1392).

| $y' = x + y = f(x,y)$ | y | x |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1.4428 | 1.2428 | 0.2 |
| 1.9836 | 1.5836 | 0.4 |

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{12}\left(23f_n - 16f_{n-1} + 5f_{n-2}\right)$$

$$y(0.6) = 1.5836 + \frac{0.2}{12}\left(23 \times 1.9836 - 16 \times 1.4428 + 5 \times 1\right) = 2.0426$$

با مقایسهٔ این تقریب با مقدار واقعی تابع $y(0.6) = 2e^{(0.6)} - (0.6) - 1 = 2.04424$ معلوم می‌شود که خطا در حدود ۰/۰۰۱۸ است. البته با کاهش h می‌توان خطا را کاهش داد.

- برای کاهش خطا در روش‌های چندگامی آدامز، می‌توان به‌طور پیوسته گام‌های قبلی را محاسبه کرد و با استفاده از تصحیح و بهینه‌سازی‌هایی که از گام‌های قبلی به‌دست می‌آید، از خطای تجمعی جلوگیری کرد.

## نتیجه گیری

در راستای حل معادلات دیفرانسیل، بهره‌گیری از رویکردهای تحلیلی و تقریبی نقش مهمی ایفا می‌کند. این روش‌ها به‌طور کُلی شامل تکنیک‌هایی هستند که هم از منظر قواعد ریاضی و هم از جنبه محاسباتی به تحلیل مسئله می‌پردازند. نتایج حاصل از این روش‌ها عبارتند از:

- در روش‌های تحلیلی، هدف دستیابی به یک راه‌حل دقیق برای معادله دیفرانسیل است. بهینه‌سازی در این روش‌ها معمولاً به معنای به‌کارگیری دانش و مهارت‌های ریاضی پیشرفته و بهره‌برداری از ویژگی‌های خاص معادله می‌باشد. این امر می‌تواند هزینه زمانی، دقت و کارایی این روش‌ها را بهبود بخشد.
- رویکرد تحلیلی برای درک نظری رفتار سیستم‌ها، ارائه جواب بسته و تحلیل ریاضی دقیق مُفید است، اما فقط برای بخش خاصی از معادلات کارایی دارد.
- در روش‌های تقریبی، هدف حل معادلات دیفرانسیل با استفاده از تکنیک‌هایی است که می‌توانند جواب‌های نزدیک به جواب دقیق را تولید کنند. این روش‌ها برای بسیاری از معادلات دیفرانسیل پیچیده، حتی در شرایطی که حل تحلیلی امکان‌پذیر نباشد، قابل استفاده هستند. به همین دلیل، این روش‌ها کاربرد گسترده‌تری دارند.
- رویکرد تقریبی(عددی) بسیار انعطاف‌پذیرتر است، برای حل معادلات پیچیده یا غیرخطی ضروری است و در کاربردهای عملی ارجحیت دارد، اگرچه همواره با خطا همراه است.

به طور کُلی، یافته‌های این تحقیق نشان داد که ترکیب روش‌های تحلیلی و تقریبی نقش مهمی در افزایش دقت، پایداری و سرعت حل معادلات دیفرانسیل ایفا می‌کند. انتخاب روش مناسب بر پایه ویژگی‌های معادله و شرایط مسئله، موجب بهبود عملکرد محاسباتی می‌شود.

**منابع**

اصغری، کرایه‌جیان. (۱۳۸۳). معادلات دیفرانسیل و کاربرد آن. انتشارات فردوسی، مشهد – ایران.

بابلیان، اسماعیل.( ۱۳۸۷). آنالیز عددی. انتشارات منصوری، تهران–ایران. صص: ۲۵۷–۲۶۶.

بهروز، غلام‌حسین.(۱۳۹۶). حل عددی معادلات دیفرانسیل.انتشارات آزاده، تهران–ایران. ص: ۲۶۴.

بهرامی، منصور.(۱۳۹۴). خلاقیت روش‌های محاسبات عددی . انتشارات گوهر، تهران–ایران.

جرالد، ویتل.(۱۳۹۳). آنالیز عددی کاردی. مترجم: علی محمد. انتشارات جهاد، تهران–ایران.

حسینی، فاطمه.(۱۳۹۲). شرح جامع آنالیز عددی۱. انتشارات ارشد، تهران– ایران. ص: ۱۸۸.

حلیم، صابره.(۱۳۹۷). معادلات دیفرانسیل . انتشارات سعید، کابل – افغانستان.

خلیلی، عبدالوکیل.(۱۳۹۱). معادلات دیفرانسیل. انتشارات سلام، کابل– افغانستان. ص: ۱۸۴.

کونت، سموئل.(۱۳۹۹). آنالیز عددی مقدماتی به شیوۀ الگوریتمی. مترجم: سراج‌الدین کاتبی. انتشارات فاطمی.

نیکوکار، مسعود.(۱۳۹۲). محاسبات عددی. انتشارات گسترش علوم پایه، تهران – ایران.صص ۱۲۰–۱۲۸.

نیکوکار، مسعود.(۱۳۸۸). معادلات دیفرانسیل. انتشارات آزاده، تهران – ایران.

مالک‌نژاد، خسرو.(۱۳۸۶). محاسبات عددی. انتشارات پچواک، کابل– افغانستان.

Abbasi, A., & Soleimani, M. (2018). Hybrid numerical-intelligent methods for solving differential equations. Journal of Computational Mathematics, 36(2), 189–202.

Ahmadi, M. (2012). Comparative analysis of HAM and Galerkin methods for solving nonlinear ODEs [Master's thesis, University of Tehran].

Ascher, U. M., & Petzold, L. R. (1998). Computer methods for ordinary differential equations and differential-algebraic equations. SIAM.

Atkinson, K. (2004). An introduction to numerical analysis (2nd ed.). Wiley.

Boyce, W. E., & DiPrima, R. C. (2001). Elementary differential equations and boundary value problems (7th ed.). Wiley.

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). Numerical analysis (9th ed.). Brooks/Cole.

Butcher, J. C. (2016). Numerical methods for ordinary differential equations (3rd ed.). Wiley.

Canuto, C., Hussaini, M. Y., Quarteroni, A., & Zang, T. A. (2007). Spectral methods: Fundamentals in single domains. Springer.

Deuflhard, P., & Bornemann, F. (2002). Scientific computing with ordinary differential equations. Springer.

Gockenbach, M. S. (2010). Partial differential equations: Analytical and numerical methods (2nd ed.). SIAM.

Hairer, E., Nørsett, S. P., & Wanner, G. (1993). Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems (2nd ed.). Springer.

Hosseinzadeh, M., & Mohammadi, S. (2023). Solving ODEs using support vector machines. Applied Soft Computing, 137, 110025. https://doi.org/10.1016/j.asoc.2022.110025

Iserles, A. (20١8). A first course in the numerical analysis of differential equations (2nd ed.). Cambridge University Press.

Kreyszig, E. (1993). Advanced engineering mathematics (7th ed.). John Wiley & Sons.

Kiani, M., Razzaghi, M., & Eslahchi, M. (2007). Numerical solutions of nonlinear differential equations using Runge-Kutta methods. Applied Mathematics and Computation, 186(1), 527–535.

Lambert, J. D. (1991). Numerical methods for ordinary differential systems: The initial value problem. Wiley.

Li, Y., & Chen, S. (2011). Numerical study of fractional differential equations using the spectral method. Applied Numerical Mathematics, 61(9), 1026–1037.

Ralston, A., & Rabinowitz, P. (20٢1). A first course in numerical analysis (2nd ed.). Dover Publications.

Shampine, L. F., & Reichelt, M. W. (1997). The MATLAB ODE suite. SIAM Journal on Scientific Computing, 18(1), 1–22.